Fonctions à ensembles fonctionnels

Ewen Le Bihan

2020-12-29

Abstract

La notation $\mathcal{D}(A, B)$ désignant l'ensemble des fonctions dérivables sur A de type $A \to B$ est assez commune, et facilement définissable de manière formelle, ainsi que sa généralisation, $\mathcal{D}^n$, ou son homologue pour les fonctions continues, $\mathcal{C}$. Mais il y a bien un lien entre ces trois notations: ce sont des *fonctions à valeurs d'ensembles ne contenant que des fonctions du type correspondants aux deux arguments passés à la fonction*, ou, plus succinctement, pour tous ensembles A et B, $\mathcal{D}(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$.

Dans cet article est exploré cette "classe" d'objets particuliers. On défini pour tout le reste de l'article l'abbréviation **FEF**, signifiant "Fonctions à valeurs d'ensembles fonctionnels". On note dans la suite de tout l'article A et B deux ensembles quelconques, $:=$ l'égalité par définition et univers l'unique ensemble tel que pour tout ensemble A, $A \neq \text{univers} \implies A \subset \text{univers}$.

1 Définitions

1.1 Définition de l'ensemble des FEF

On définit dès lors un nouvel ensemble $\mathbb{Y}$

$$\mathbb{Y} := \mathcal{F}(A \times B,\ \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$$

Où:

- $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions de type $A \to B$. Pour la définition formelle de $\mathcal{F}$, cf. 1.3.
- $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A

On a bien:

- $\mathcal{F} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{C} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{D} \in \mathbb{Y}$

1.2 Un conflit de notations: l'exposant

Cette perspective de $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^n$ comme de simples fonctions soulève un conflit assez désagréable de notation: si $\mathcal{D}$ est une fonction, on devrait avoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^n = \bigcirc_{i=0}^{n} \mathcal{D}$$

Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Dès lors, par souci de clarté, contrairement à la notation traditionnelle, $\mathcal{D}_n$ **désignera l'ensemble des fonctions n fois dérivables, et $\mathcal{D}^n$ la fonction $\mathcal{D}$ n fois composée avec elle-même**. On fera la même entorse aux notations classiques pour $\mathcal{C}$.

1.3 Définition formelle de $\mathcal{F}$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est particulier: *il est nécéssaire que $\mathcal{F}$ soit définie pour définir $\mathbb{Y}$ même.*

De ce fait, la définition de $\mathcal{F}$ nécéssite une définition formelle des applications. On restera au stade d'une définition semi-formelle:

$$\mathcal{F} := (A, B) \mapsto \{f \in \text{univers},\ f : A \to B\}$$

1.4 Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF

On a, pour tout élément $F \in \mathbb{Y}$:

1. F est d'arité 2 (i.e. F prend deux arguments)
2. F est à valeur d'ensembles

On en déduit que *tout élément de $\mathbb{Y}$ possède la même arité et renvoie des valeurs de nature ensembliste.*

Il est donc possible d'étendre canoniquement et sans ambiguïté les opérateurs ensemblistes aux FEF. On a donc:

$$\forall \square \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\},\ \forall (F, G) \in \mathbb{Y}^2,\ F \square G := (A, B) \mapsto F(A, B) \square G(A, B) \tag{1}$$
$$\forall F \in \mathbb{Y},\ {}^c F := (A, B) \mapsto {}^c(F(A, B)) \tag{2}$$
$$\forall F \in \mathbb{Y},\ F^* := F \setminus (A, B) \mapsto \{x \mapsto 0_A\} \tag{3}$$

On précise pour (2) que l'"univers" des FEF (c'est-à-dire tel que le complémentaire de l'univers est $\emptyset$) est $\mathcal{F}$: On a bien ${}^c\mathcal{F} = \emptyset$, l'ensemble des fonctions de A dans B qui ne sont pas des fonctions de A dans B est vide. De ce fait, on a:

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ {}^c F := \mathcal{F} \setminus F$$

.

On précise pour (3) que 0_A représente l'élément neutre du magma unitaire[1] $(A, +)$. Cette définition a donc un sens si et seulement si $(A, +)$ est un magma unitaire.

Cette extension de notation permettra notamment de définir la FEF des bijections de manière très succinte (cf 1.7.5)

1.5 Surcharge de $\in$

Il peut être souhaitable de vouloir exprimer la contrainte "cette fonction vérifie cette propriété", sans avoir à contraindre la source ou le but de ladite fonction. On redéfini donc $\in$ avec une fonction à gauche et un FEF à droite de la manière suivante:

$$\forall \text{LHS}, \text{RHS},\ \begin{cases} \text{LHS} & \in \mathcal{F}(A, B) \\ \text{RHS} & \in \mathbb{Y} \end{cases} \implies \left(\text{LHS} \in \text{RHS} \overset{\text{def}}{\iff} \text{LHS} \in \text{RHS}(A, B) \right)$$

1.6 Notation succinte pour définir des FEF

On note, pour tout $F \in \mathbb{Y}$ et pour toute proposition P convenablement définie:

$$\underset{f : A \to B}{\text{FEF}} P(f, A, B) := (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ P(f, A, B)\}$$

Cette notation définit un opérateur similaire à lim qui est exprimable en tant que fonction, en effet, on a $\text{FEF} \in \mathcal{F}(B^A \times A \times B \times \mathcal{F}(B^A, A, B), \mathbb{Y})$

[1] i.e. A possède un élément neutre pour $+$

1.6.1 Exemple: Définition de la FEF des paires

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f\circ(-\,\mathrm{id}_A) = (A,B)\mapsto \{f\in B^A,\ f\circ(-\,\mathrm{id}) = f\}$$

1.7 Définition de quelques FEF

1.7.1 Dérivabilité, continuité

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $u\in-\mathbb{N}^*$.

$$\mathcal{D}_n := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\exists l\in\mathbb{R},\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\,\to\,a]{} l\right) \tag{4}$$

$$\mathcal{D}_u := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\exists F\in B^A,\ F' = f\right) \tag{5}$$

$$\mathcal{C}_n := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\forall a\in A,\ \lim_{\epsilon\to a} f(\epsilon) = a\right) \tag{6}$$

Dans (4), la condition sur la limite implique également que la limite doit exister.

1.7.2 Monotonie

Sont définies ci-après les FEF des fonctions croissantes, des fonctions décroissantes et leurs homologues stricts et, en s'inspirant fortement des notations de la théorie des ensembles.

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\forall x,y\in A,\ x\geq y \implies f(x)\geq f(y)\right)$$

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\forall x,y\in A,\ x> y \implies f(x)> f(y)\right)$$

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\forall x,y\in A,\ x\geq y \implies f(x)\leq f(y)\right)$$

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\forall x,y\in A,\ x> y \implies f(x)< f(y)\right)$$

1.7.3 Concavité

1.7.4 Parité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions paires et impaires. Leurs symboles proviennent du graphe d'une fonction $(\mathrm{id})^n$ avec n pair ou impair.

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f\circ(-\mathrm{id}_A) = f$$

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f\circ(-\mathrm{id}_A) = -f$$

1.7.5 *jectivité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions injectives, surjectives et bijectives. Leurs symboles proviennent des diagrammes sagittaux.

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\left(\forall(a_1,a_2)\in A^2,\ f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2\right)$$

$$:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f\in B^A,\ (\forall b\in B,\ \exists a\in A,\ f(a) = b)$$

La surcharge de la notation d'intersection permet de définir facilement à partir de et:

$$:= \cap$$

C'est enfait la définition même du quantificateur $\exists!$ qui intervient dans cette facilité de définition.

1.7.6 Périodicité

Soit $T \in A$.

$$\circlearrowleft_T := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}}\, \forall n \in \mathbb{Z},\ f \circ (\mathrm{id} + nT) = f.$$

2 Applications

2.1 Définition formelle succinte de nombreux ensembles et énoncés

Notamment:

- L'ensemble des extractrices, $\underset{\neq}{\nearrow}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$
- Toute fonction croissante a une dérivée positive, $\mathrm{d}^{\rightarrow}(\underline{\nearrow}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ Même si un énoncé plus simple serait “Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Alors $f' > 0$”, l'énoncé premier a deux avantages:
  - Il est totalement symbolique (et donc ne requiert pas de traduction, en plus d'être bien défini)
  - Permet un énoncé sans introduction de variables (liées ou libres).
- Plus généralement, la quantification d'une fonction et de propriété requises est combinée en une simple quantification: Au lieu d'avoir $\forall f \in \mathcal{F}(A, B), P(f) \implies Q(f)$, on peut condenser l'énoncé à $\forall f \in \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} P(f)(A, B), Q(f)$, ce qui peut s'avérer plus naturel dans certains cas[2].
- La définition succinte de la relation “les ensembles A et B sont en bijection”:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\text{univers}),\ A \approx B \overset{\text{def}}{\iff} (\!\equiv\!)(A, B) \neq \emptyset$$

[2]Bien évidemment, l'énoncé est plus succint si $\underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} P(f)$ est un FEF assigné à un symbole, comme $\underline{\nearrow}$.

Contents