Analyse Fréquentielle d'un système linéaire

En physique, il est intéressant de savoir extraire d'un signal l'information souhaitée et la trier du bruit. Il faut donc faire un filtrage. On doit alors étudier le comportement fréquentiel d'un système

[poly]

I Fonction de transfert

1 Définition

Soit un système linéaire transformant $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$
en $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$.

La fonction de transfert, c'est la grandeur $\in \mathbb{C}$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}}$$

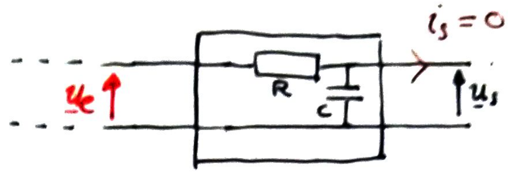
contenant 2 infos :

- $|\underline{H}|$ donne le rapport des amplitudes
- $\arg \underline{H}$ donne le déphasage entre sortie et entrée

2 Exemple de calcul

$\omega = 2\pi f$

Soit le $\begin{cases} \text{quadripôle} \\ \text{syst. linéaire} \\ \text{filtre} \end{cases}$



sortie ouverte

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \qquad \underline{u_s} \underset{\text{tension}}{\overset{\text{div de}}{=\!=}} \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} \underline{u_e}$$

$$= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

rem c'est long mais ça marche aussi

$$\begin{cases} u_e = u_s + Ri \\ i = C\dot{u}_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_e = u_s + RC\dot{u}_s$$

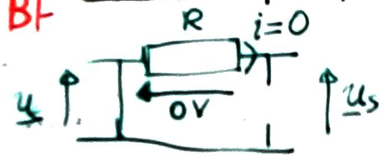
$$\Rightarrow \underline{u_e} = \underline{u_s} + RC\dot{\underline{u_s}}$$

$$\Rightarrow \underline{u_e} = \underline{u_s} + jRC\omega \underline{u_s}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

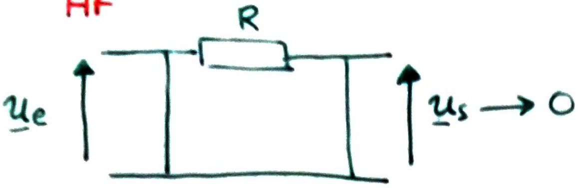
Prévision du comportement fréquentiel

• BF $\underline{\omega \to 0}$ $\quad |\underline{Z_C}| = \frac{1}{C\omega} \longrightarrow +\infty$; $\quad$ —||— C $\Leftrightarrow$ —/ —



$\Rightarrow \underline{u_s} = \underline{u_e}$

• HF $\omega \longrightarrow +\infty \Rightarrow |\underline{Z}_c| = \frac{1}{C\omega} \longrightarrow 0 \Rightarrow$ —| |—^{C} $\Leftrightarrow$ ——



Le filtre / circuit RC laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences

3 Diagramme de Bode

On représente le comportement d'un filtre grâce au diagramme de Bode qui se décline en 2 volets:

• Tracé du gain en décibels

en éch. logarithmique $\quad G_{dB} = 20 \log \underline{H} = 20 \log G$

où $G = |\underline{H}|$ le gain

• Tracé du déphasage

$\varphi = \arg \underline{H}$

Exemples

$G_{dB} = 20 \text{ dB} \Leftrightarrow G = 10$

$u_s > u_e$

$u_s < u_e$

$G_{dB} = -40 \text{ dB} \Leftrightarrow G = 10^{-2}$

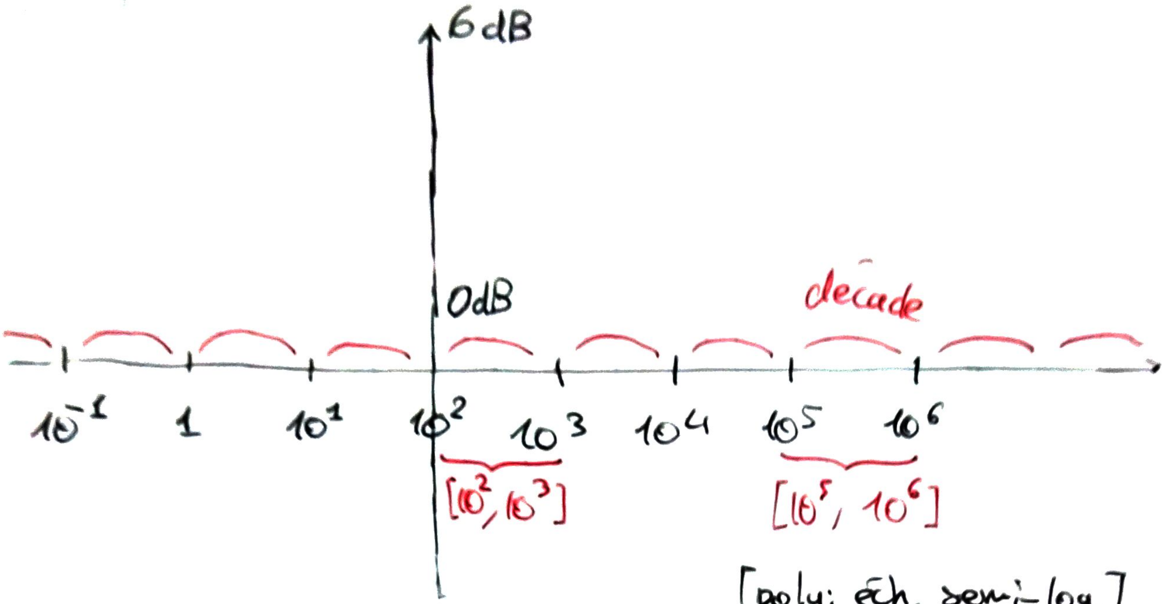
$\left(|\underline{H}| = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} \right)$

remq pourquoi l'échelle logarithmique

Si on travaillait avec une échelle linéaire classique

L'intervalle $[0, 10^3]$ Hz est infiniment petit sur cette échelle

On passe alors à une échelle logarithmique.
Cette échelle n'a pas d'origine



[poly: éch. semi-log]

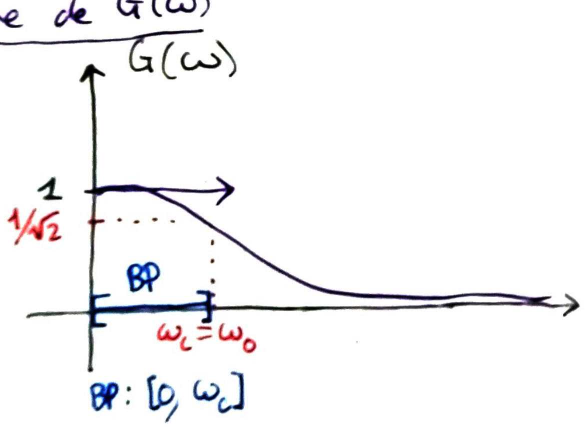
4 Exemple du diagramme de Bode

On pose $\underbrace{\omega_0}_{\text{rien à voir avec la pulsat° propre}} := \frac{1}{RC}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \left(\text{parfois } x := \frac{\omega}{\omega_0} \quad \underline{H} = \frac{1}{1+jx}\right)$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

<u>Allure de $G(\omega)$</u>



$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow G \leq 1$$

Diagramme de Bode

1 Étude asymptotique de $\underline{H}$

- $\boxed{\omega \ll \omega_0}$

$\underline{H} \approx 1$ ($j\frac{\omega}{\omega_0}$ négligeable)

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 20 \log G = 0 \text{ dB} \\ \varphi = \arg \underline{H} = 0 \quad (\text{rad}) \end{cases}$$

- $\boxed{\omega \gg \omega_0}$

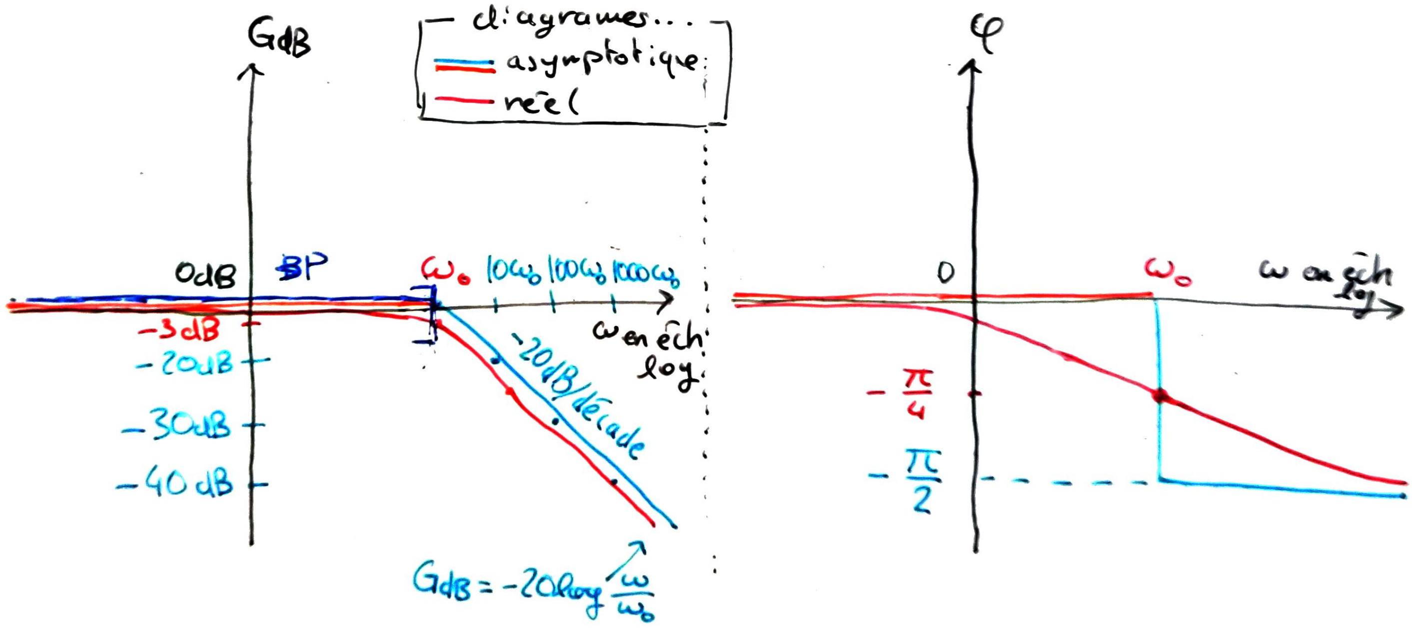
$\underline{H} \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ (1 négligeable)

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi = \arg \underline{H} = 0 - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- $\omega = \omega_0$

$\underline{H} = \frac{1}{1+j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -10 \log 2 = -3 \text{ dB} \\ \varphi = \arg \underline{H} = 0 - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



remq pulsation de coupure à $-3dB$

c'est ω_c tq

$$G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB} = G_{dB_{max}} + 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\omega_c /$ $\boxed{G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB} = G_{dB_{max}} - 3\,dB}$

Ici, $\omega_c = \omega_0$

Autre preuve

$\omega_c /$ $G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

$G_{max} = 1$ ici

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \omega_c = \omega_0$$

Bande passante à $-3\,dB$

Intervalle de pulsation tq

BP tq $\boxed{G \geq \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB} \geq G_{dB_{max}} - 3\,dB}$

remq comportement du circuit RC en HF

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \underline{u_s} = \omega_0 \frac{\underline{u_e}}{j\omega}$$

$Re(\cdot)$

$$\Rightarrow u_s = \omega_0 \int u_e$$

caractère intégrateur