# Introduction à la Mécanique des systèmes (solide en rotation)

Jusqu'ici, on a étudié la mécanique du point.

Un système est constitué d'une infinité de points.

Le modèle du système de points discrets (N points de masse $m_i$) n'est qu'un modèle approché.

En réalité, les systèmes sont modélisables de manière continue (volume $dV$, masse $= \rho \cdot dV$)

Pour simplifier, on fait une approche discrète du système.

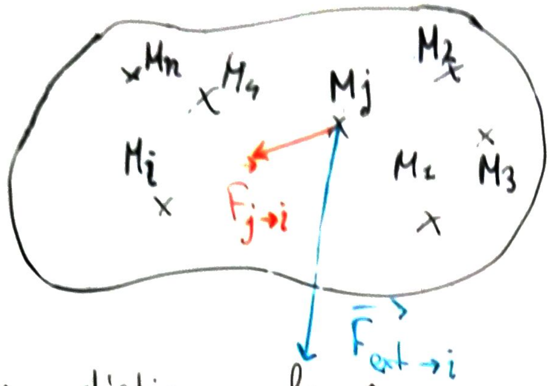
## I Théorème de la résultante cinétique (TRC)

### 1 Force intérieure & force extérieure

rpl

- Satellite : $\vec{F}$ exercée par la T / Sat. $F_{ext}$

Pour un système discret : (N points de masse $m_i$)




On distingue les forces :

- extérieures : $\vec{F}_{ext\to i}$
- intérieures : $\vec{F}_{int\to i}$

conséq

La résultante des forces (s'exerçant sur le système)

$$\vec{F} = \sum_i \left(\vec{F}_{ext\to i} + \vec{F}_{int\to i}\right)$$

$$= \underbrace{\sum \vec{F}_{ext\to i}}_{\vec{F}_{ext}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{int\to i}}_{\vec{0}} \quad \left(\forall i,j,\ \vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}_{ext}}$$

## 2 TRC en réf. Galiléen.

préli

$$M = \frac{c_1 n_1 + \cdots + c_n n_n}{\sum_i c_i} \Leftrightarrow M C_t = \sum_i c_i n_i \quad \text{“moyenne pondérée”}$$

**def** barycentre G ou centre de gravité ou centre de masse

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} := \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GO} + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} \sum_i m_i + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} / \underbrace{m}_{\text{masse totale}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = m \overrightarrow{OG}$$

« "L'équivalent de la moyenne pour la géométrie" »

**dem**

2e loi de Newton pour chaque point $M_i$

$$m_i \dot{\vec{v}_i} = \vec{F}_{ext \to i} + \vec{F}_{int \to i}$$

$\Sigma$

$$\Leftrightarrow \sum_i m_i \ddot{\overrightarrow{OM_i}} = \vec{F}_{ext}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{F}_{ext}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} (m \overrightarrow{OG}) = \vec{F}_{ext}$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{\overrightarrow{OG}} = \vec{F}_{ext}$$

**thm** $\Leftrightarrow \boxed{m \vec{a} = \vec{F}_{ext}}$ TRC remq

Voilà pourquoi on dessinait toujours le poids au centre de gravité.

# II Moment cinétique

En $R_g$, on applique le TMC en $O$ à tous les points $M_i(m_i)$

$$\dot{\vec{L}}_O(M_i) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext\to i}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{int\to i})$$

$$= \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{ext\to i} + \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{int\to i}$$

~~sauvon~~ sommons

$$\Leftrightarrow \sum_i \dot{\vec{L}}_O(M_i) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{ext\to i} + \cancel{\boxed{\sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{int\to i}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_O(M_i) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{ext\to i}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_O(S) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext})}$$

$\square$ $\forall i, j$ :

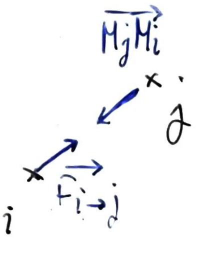
$$\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{i\to j} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{j\to i}$$

$$= \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{i\to j} + \overrightarrow{OM_j} \wedge (-\vec{F}_{i\to j})$$

$$= (\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_j}) \wedge \vec{F}_{i\to j}$$

$$= \overrightarrow{M_jM_i} \wedge \vec{F}_{i\to j}$$

$$= \vec{0}$$ car //



Par rapport à un axe $\Delta$ :

$$\boxed{L_\Delta(S) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext})}$$

Calcul du moment du poids

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_i)$$

$$= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{g}$$

$$= \sum_i \left(m_i\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{g}\right)$$

$$= \sum_i \left(m_i\overrightarrow{OM_i}\right) \wedge \vec{g}$$

$$= m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g}$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

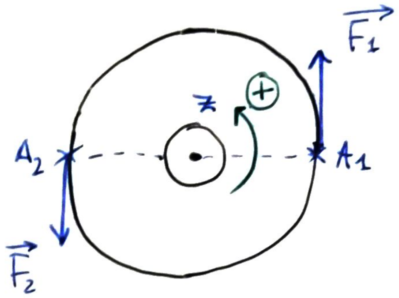
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}}$$

Tout se passe come si le poids s'exerçait au centre de gravité du système.

# III Couple de forces

def

Ensemble de deux forces de résultante nulle mais pouvant provoquer la rotation d'un système ex volant



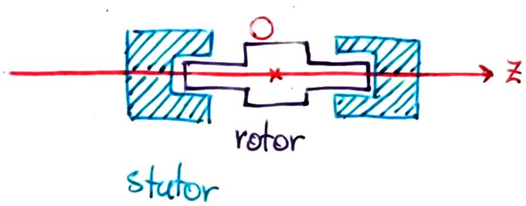

$$\vec{M_O} = \vec{M_O}(\vec{F_1}) + \vec{M_O}(\vec{F_2})$$
$$= \vec{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{OA_2} \wedge \vec{F_2}$$
$$= \vec{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{OA_2} \wedge (-\vec{F_1})$$
$$= (\vec{OA_1} - \vec{OA_2}) \wedge \vec{F_1}$$
$$= \vec{A_2A_1} \wedge \vec{F_1}$$
$$= A_2A_1 \cdot F_1 \vec{u_z}$$

remq

$$\vec{M_O} = A_2A_1 \cdot F_1 \vec{u_z} \not\Rightarrow 0$$

Donc : $\vec{C} := \vec{\Gamma} := A_2A_1 \cdot F_1 \vec{u_z}$ en $N \cdot m$

# IV Liaison pivot




Une liaison pivot restreint les possibilités du mouvement du rotor par rapport au stator à une seule rotation.

- pas de translation possible
- très peu de frottements

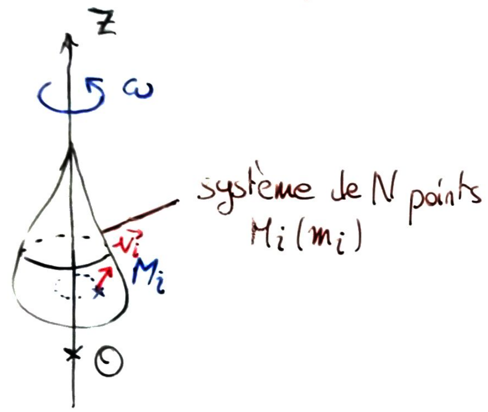
} liaison pivot-parfait $\mathcal{M}_{O_z} = 0$

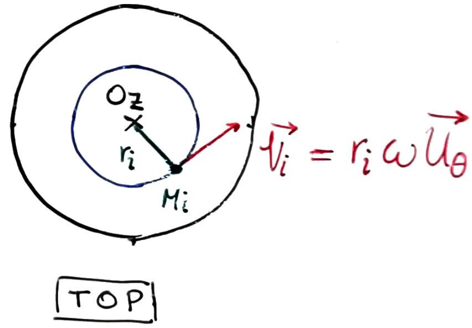
le moment de toutes les action de contact est nul

eg roulement à billes

# V Loi scalaire du $\vec{\mathcal{M}_O}$ pour un solide en rotation

## 1 Moment cinétique




$$L_{O_z}(M_i) = \vec{L_O}(M_i) \cdot \vec{u_z}$$

$$= \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i} \cdot \vec{u_z}$$

$$= OM_i \, m_i \, v_i$$

$$= r_i \, m_i \cdot r_i \omega$$

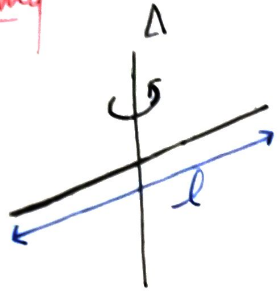
$$\Rightarrow L_{O_z}(S) = \sum_i L_{O_z}(M_i) = \sum_i m_i r_i^2 \omega$$

$$\rightarrow \mathcal{M}_{O_z}(S) = \omega \Big[ \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{\text{moment d'inertie de } S/O_z \ J_{O_z}} \Big]$$

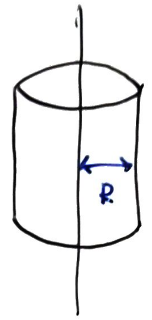
**def** moment d'inertie

$$\boxed{J_{Oz} = \sum_i m_i r_i^2}$$

**remq**




$J_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2$




$J_\Delta = \frac{1}{2} m R^2$

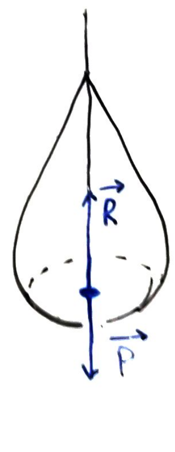
**remq**

$$\begin{cases} J_{Oz} \propto m_i \\ J_{Oz} \propto r_i^2 \end{cases}$$

Les points avec $m_i$ ou $r_i$ grand ont le plus d'importance dans $J_{Oz}$

$$\boxed{L_{Oz}(S) = J_{Oz} \cdot \omega}$$

On applique le TMC (cf. II)




$$\dot{L}_{Oz} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{ext})$$

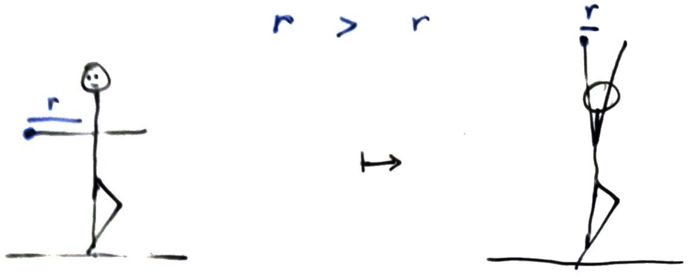
$$= \cancel{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P})} \quad \text{car } \vec{R} = -\vec{P}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow J_{Oz} \cdot \omega = 0$$

eg Patinage artistique

$r > r$



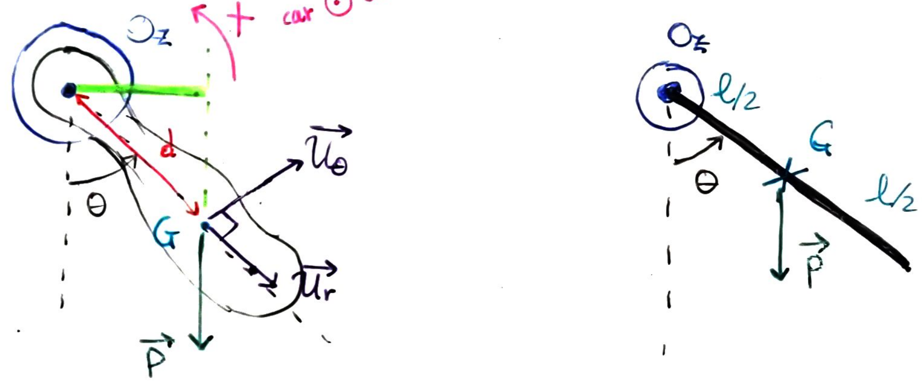
$J_{Oz} > J_{Oz}$

$\Rightarrow \omega < \omega \Rightarrow$ elle tourne plus vite

car $J_{Oz} \cdot \omega$ constant

## 2 Pendule

+ car ⊙ au lieu ⊗




TMC $\Rightarrow$ $L_{Oz}(S) = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \cancel{\mathcal{M}_{Oz}(\text{pivot parfait})}$

Meth 1 $\quad \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} \cdot \vec{u_z}$

$= d\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}) \cdot \vec{u_z})$

$= -mgd\sin\theta\,\vec{u_z} \cdot \vec{u_z}$

$= -mgd\sin\theta$

Meth 2 $\quad \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = \pm P \cdot$ bras de levier

$= -\,mg\,d\sin\theta$

$$J_{Oz}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \qquad = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{Oz}}\sin\theta = 0$$

$\sin\theta \simeq \theta$ bien sûr

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\omega_0^2}_{\sqrt{\frac{mgd}{J_{Oz}}}}\theta = 0$$

# VI Aspect énergétique

## 1 Pour un système de N points de masse $m_i$

$$\forall i, \quad E_{c_i} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E_c(S) = \sum_i E_{c_i} = \sum \frac{1}{2} m v_i^2$$

On admet que les forces intérieures n'interviennent pas dans le bilan énergétique

$$W_{int} = 0 \Rightarrow P(\vec{F_{int}}) = 0$$

On a, en $R_g$

- TEC : $\Delta E_c = W(\vec{F_{ext}})$
- TPC : $\dot{E_c} = P(\vec{F_{ext}})$
- TEM : $\Delta E_m = W(\vec{F_{ext,nc}})$

2 Pour un système en rotation autour de $\Delta$

$$E_c(S) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_c(S) = \frac{1}{2}\omega^2 J_\Delta}$$

On applique le TMC ($\dot{L}_\Delta(S) = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}})$)

Or $L_\Delta = J_\Delta \omega = J_\Delta \dot{\theta}$

d'où $J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta$

$$\Leftrightarrow J_\Delta \ddot{\theta}\dot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2\right) = \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{E}_c(S) = \underbrace{\mathcal{M}_\Delta \omega}_{\text{puissance}}} \quad \begin{array}{l}[N\cdot m]\cdot[rad\cdot s^{-1}] \\ [W]\end{array}$$

Loi de l'énergie cinétique

□