$$\left.\left.\frac{ab}{rT} + \frac{a^2}{2r^2T^2}\right)\right] \Rightarrow \quad pV = RT\left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2}\right)$$

avec $\boxed{B = b - \frac{a}{rT} \qquad C = 2\frac{b^2}{v^2} - \frac{ab}{rT} + \frac{a^2}{2r^2T^2}}$

$\boxed{\text{TH } 102}$.

1°) Equilibre du mercure : $P_0 = \mu_m g H \Rightarrow \boxed{H = 75\text{ cm}}$.

Forces verticales exercées sur le vase :

* poids : $-\mu_v g \ell (S-s)$.
* forces de pression : air $-P_0 S$

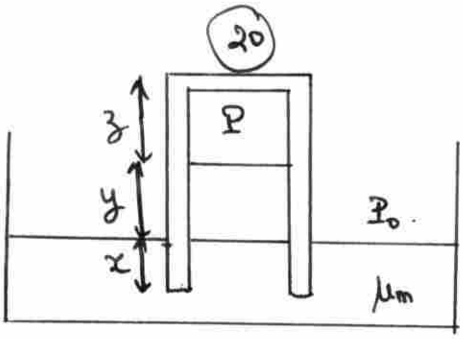
mercure $+(P_0 + \mu_m g h)(S-s)$.

$\Rightarrow \quad -P_0 s + (S-s)\mu_m g h - \mu_v g \ell (S-s) = 0$ à l'équilibre.

avec $P_0 = \mu_m g H$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{\mu_v}{\mu_m}\ell + \frac{s}{S-s}H}$$

2°)



* $x + y + z = \ell \quad (1)$
* à T cte, pour l'air : $P_0 V_0 = P s z \quad (2)$
* hydrostatique : $P_0 - P = \mu_m g y \quad (3)$.
* Equilibre du tube de verre :

$$-\mu_v (S-s) g \ell - P_0 S + P s + (P_0 + \mu_m g x)(S-s) = 0 \quad (4).$$

$(4) \Rightarrow \; -\mu_v (S-s) g \ell - \cancel{P_0 S} + P s + \cancel{P_0 S} - P_0 s + \mu_m g x (S-s) = 0$

avec (3) $\Rightarrow \; -\mu_v (S-s) g \ell - \mu_m g y s + \mu_m g x (S-s) = 0$.

soit : $\ell + 5{,}44(y - x) = 0$. soit $\underline{x - y = 36{,}76\text{ cm}}$.

(3) $\Rightarrow \quad \mu_m g H - P = \mu_m g y$

(2) $\Rightarrow \quad P = \dfrac{P_0 V_0}{s z} = \dfrac{\mu_m g H}{s z}$

$\Rightarrow \quad (H-y) s z = H V_0$

soit (en cm) $\underline{(75-y) z = 300}$.

(1) $\Rightarrow \quad x + y + \ell = 200 = 2y + 36{,}76 + z = 2\left(75 - \dfrac{300}{z}\right) + 36{,}76 + z$.

$\Rightarrow \quad z^2 - 13{,}24 z - 600 = 0$.

D'où $\boxed{z = 32\,\text{cm} \ ; \ y = 65{,}6\ \text{cm} \ ; \ x = 102{,}4\ \text{cm}}$

(3°) on enfonce de X donc $x' = x + X = 130\,\text{cm}$.

alors $\underline{y' + z' = 70\,\text{cm}}$.

$P'V' = P_0 V_0 \quad \Rightarrow \quad s z' P' = P_0 V_0$

$P_0 - P = \mu_m g y' \quad \Rightarrow \quad \dfrac{P'}{\mu_m g} = H - y'$

$\Rightarrow \quad s z' (H - y') = H V_0$.

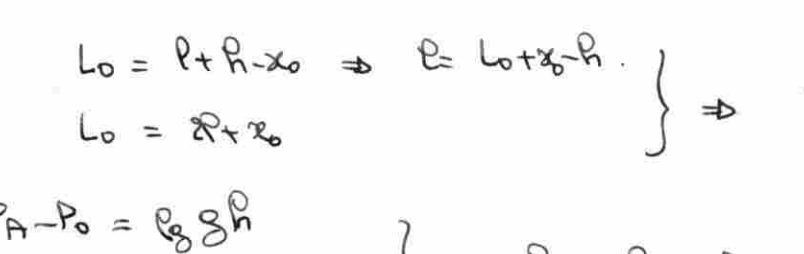
soit : $\underline{(H-y') z' = 300}$ (en cm²).

$\Rightarrow \quad z'^2 + 5z' - 300 = 0$ soit $\boxed{\begin{array}{l} z' = 15\,\text{cm} \\ y' = 55\,\text{cm} \end{array}}$

TH 103

(1°)

(a)



$L_0 = \ell + h - x_0 \quad \Rightarrow \quad \ell = L_0 + x_0 - h$

$L_0 = 2\ell + x_0$

$\Rightarrow \quad \underline{3\ell + h = 2L_0}$.

$P_A - P_0 = \rho_g g h$

$P_A - P_0 = \rho_m \cdot 2x_0 \cdot g$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{\rho_m}{\rho_g} \cdot 2x_0 = \dfrac{\rho_m}{\rho_m} (h - \ell)$

$\Rightarrow$ volume à ajouter $\boxed{V = Sh = \dfrac{S L_0}{2 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\rho_g}{\rho_m}}}$ $h = 26{,}85$ cm. $V = 53{,}7\ cm^3$.

(b) $\ell_2 = 2\ell = 48{,}76$ cm
$\ell_1 = \ell = 24{,}38$ cm. $2x_0 = 24{,}88$ mm.

(2c)

→ Etat initial : $B_1 \to P_0, T_0$, n mol. $B_2 \to P_0, T_0$, $2n$ mol. où $n = \dfrac{P_0 \cdot \ell S}{RT_0}$.

→ Etat final : $B_1 \to P_1(\ell - x)S = nRT_0$ (1)
$B_2 \to P_2(2\ell + x)S = 2nRT$ (2).

→ Eq. hydrostatique en A : $P_A - P_1 = \rho_g g h$
$P_A - P_2 = \rho_m g\, 2(x_0 - x)$.

$$\Rightarrow \quad P_2 = P_1 + g\left[\rho_g h - 2\rho_m (x_0 - x)\right]$$

or $\rho_g h = 2\rho_m x_0 \Rightarrow \underline{P_2 - P_1 = 2\rho_m g x}$.

Alors : $T = \dfrac{T_0}{2} \cdot \dfrac{2\ell + x}{\ell - x} \dfrac{P_2}{P_1}$. d'après (1) et (2).

Avec (1) : $P_1 = \dfrac{P_0 \ell S}{S(\ell - x)} = P_0 \dfrac{\ell}{\ell - x}$

et $P_2 = P_1 + 2\rho_m g x = P_0 \dfrac{\ell}{\ell - x} + 2\rho_m g x$.

$$\Rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\rho_m g x(\ell - x)}{P_0 \ell}.$$

Alors : $\boxed{T(x) = T_0\left[\ell + \dfrac{x}{2}\right]\left[\dfrac{1}{\ell - x} + \dfrac{2\rho_m g x}{P_0 \ell}\right]}$. → thermomètre alors : $\boxed{\dfrac{dT}{dz} = K = -\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{g a_0 T_0}{P_0}}$ AN : $K = -10{,}5$ K.km^{-1}.

d) $T(z) = T_0 + Kz$ $(K<0)$.

$P = P_0\left[\dfrac{T(z)}{T_0}\right]^{\gamma/\gamma-1} \Rightarrow \boxed{p(z) = p_0\left(1+\dfrac{Kz}{T_0}\right)^{\gamma/\gamma-1}}$

et $\boxed{a(z) = a_0\left(1+\dfrac{Kz}{T_0}\right)^{1/\gamma-1}}$

soit encore : $\boxed{\begin{array}{l} p(z) = p_0\,(1-\alpha z)^{\gamma/\gamma-1} \\ a(z) = a_0\,(1-\alpha z)^{1/\gamma-1} \end{array}}$

3°) $\vec{F} = [M + m_{He}]\vec{g} + \vec{F}_{archimède}$.

avec $m_{He} = \underbrace{d\,a(z)}_{\rho_{He}}\cdot V\cdot g$. $F_{arch.} = a(z)\cdot V\cdot g$.

$\Rightarrow \boxed{F = [aV(1-d) - M]\,g}$

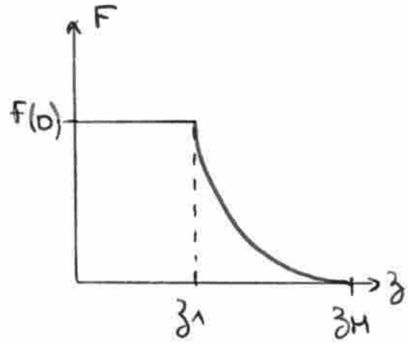
Si $z<z_1$: $(V_0 < V < V_M)$ $P_{He} = P_{ext}$ et la masse d'hélium reste cte (ne s'échappe pas).

donc $aV = a_0V_0 = $ cte

D'où $\boxed{F = [a_0V_0(1-d) - M]\,g \text{ est constante}}$

Si $z > z_1$: $V = $ cte $= V_M$. l'hélium s'échappe.

$\boxed{F = [V_M\,a(z)\,(1-d) - M]\,g \text{ varie}}$



F diminue jusqu'à s'annuler.

2°) Tant que $V<V_M$, He ne s'échappe pas et m_{He} = cte

$m_{He} = a_0 d\,V_0 = a(z_1)\,d\,V_M$. $\Rightarrow \boxed{z_1 = \dfrac{1}{\alpha}\left[1-\left(\dfrac{V_0}{V_M}\right)^{\gamma-1}\right] = 3\,380\text{ m}}$

(b) on veut $x = x_0$: $T' = T(x_0) = 58°C$.

TH 104

$$\frac{dT}{dz} = -a \Rightarrow \boxed{T(z) = T_0 - az}$$

(1°) $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ et $\rho = \frac{MP}{RT} = \frac{MP}{R(T_0 - az)}$.

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\frac{dz}{T_0 - az}$$

$$\Rightarrow \ln P = \frac{Mg}{Ra}\ln(T_0 - az) + cte$$

pour $z = 0$: $T = T_0$ $P = P_0$.

$$\Rightarrow \ln\frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{Ra}\ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right) \quad \text{soit :} \quad \boxed{P(z) = P_0\left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{Mg/aR}}$$

$$\boxed{\rho(z) = \frac{MP_0}{RT_0}\left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra} - 1}}$$

(2°) $\frac{dT}{dz} = -\frac{1,4}{200} = -7.10^{-3}\ K.m^{-1} = -a$.

$$P(z_1) = \frac{P_0}{2} = P_0\left(1 - \frac{a}{T_0}z_1\right)^{Mg/Ra} \Rightarrow \underline{z_1 = 5,47\ km}.$$

TH 105.

(1°)

(a) $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ $\rho = \frac{MP}{RT}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\frac{dz}{T(z)}}$

(b) Adiab. rev : $\boxed{\frac{dP}{P} + \frac{\gamma}{-\gamma + 1}\frac{dT}{T} = 0}$ $[\ PT^{\gamma/1-\gamma} = cte]$.

(c) En éliminant P : $\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} = -\frac{Mg}{R}\frac{dz}{T}$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{Mg}{R} = K \quad \text{or :} \quad a_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0} \Rightarrow \frac{M_a}{R} = \frac{a_0 T_0}{P_0}$$

10° Plafond z_M pour $F(z_M) = 0$.

soit : $V_M\, a(z_M)\,(1-\alpha) = M$

$$\Rightarrow \boxed{z_M = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{M}{a_0 V_M (1-\alpha)}\right)^{\gamma-1}\right] = 7{,}9 \text{ km}}$$

Avec $M' = M - \Delta M = V_M\, a(z'_M)\,(1-\alpha)$ avec $z'_M = 1100\text{ m} + z_M$.

$$\boxed{\Delta M = M - a_0 V_M (1-\alpha)\,(1-\alpha z'_M)^{1/1-\gamma} = 16{,}1 \text{ kg}}$$

TH 106

$$P(V-nb) = nRT \exp - \frac{na}{RTV}$$

<u>Point critique</u> = point d'inflexion à tangente horizontale en coord. de Clapeyron.

- $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=T_c} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{na}{RTV^2} = \frac{1}{V-nb}}$.

car $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{nRT}{V-nb} e^{-na/RTV}\left[-\frac{1}{V-nb} + \frac{na}{RTV^2}\right] = P\left[\frac{na}{RTV^2} - \frac{1}{V-nb}\right]$

- $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T=T_c} = 0 = P\left[-\frac{2na}{RTV^3} + \frac{1}{(V-nb)^2}\right] + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}_{=0 \text{ en } T=T_c}\left[\frac{na}{RTV^2} - \frac{1}{V-nb}\right]$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{(V-nb)^2} = \frac{2na}{RTV^3}}$$

on a donc : $\boxed{V_c = 2nb}$

$$\boxed{T_c = \frac{a}{Rb}}$$

$$\boxed{P_c = \frac{a}{2e^2 b^2}}$$

[redacted]

Pression d'un gaz parfait

a. $\Delta\mathbf{p} = m.\mathbf{v_f} - m.\mathbf{v_i} = -2m.v_x.\mathbf{u_x}$. $\Delta\mathbf{P}_{p1} + \Delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$ d'où $\Delta\mathbf{P}_{p1} = -\Delta\mathbf{p} = 2m.v_x.\mathbf{u_x}$.

b. $dN = N.A.\exp\left(-\frac{1}{2}mv_x^2\right)dv_x.\frac{dS.v_x.dt}{V} = \frac{A.N}{V}v_x\exp\left(-\frac{1}{2}mv_x^2\right)dv_x.dS.dt.$

$d\mathbf{P}_p(v_x) = dN.\Delta\mathbf{P}_{p1} = 2m.v_x.dN.\mathbf{u_x} = 2m\frac{A.N}{V}v_x^2\exp\left(-\frac{1}{2}mv_x^2\right)dv_x.dS.dt.\mathbf{u_x}$.

c. $d\mathbf{P}_p = 2m\int_0^{\infty}\frac{A.N}{V}v_x^2\exp\left(-\frac{1}{2}mv_x^2\right)dv_x.dS.dt.\mathbf{u_x} = 2m\frac{N}{V}\frac{\overline{v_x^2}}{2}.dS.dt.\mathbf{u_x} = m\frac{N}{V}\frac{\overline{v^2}}{3}dS.dt.\mathbf{u_x}$.

$d\mathbf{P}_p = \mathbf{F}.dt = P.dS.dt.\mathbf{u_x}$. Alors, $P = m\frac{N}{V}\frac{\overline{v^2}}{3}$.

d. $P = m\frac{N}{V}\frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{2U}{3V}$. Or, $U = \frac{3}{2}nRT$, on obtient $PV = nRT$.

[redacted]

Système à 3 niveaux

a. La loi de Boltzmann donne la probabilité : $p_j = A.\exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right)$

Le nombre moyen de particules dans l'état d'énergie E_j vaut : $\overline{N_j} = p_j.N$.

Par normalisation, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ d'où $A = \dfrac{1}{1+2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$.

Au final, $\overline{N_1} = N\dfrac{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right)}{1+2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$, $\overline{N_2} = \dfrac{N}{1+2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$, $\overline{N_3} = N\dfrac{\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)}{1+2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$.

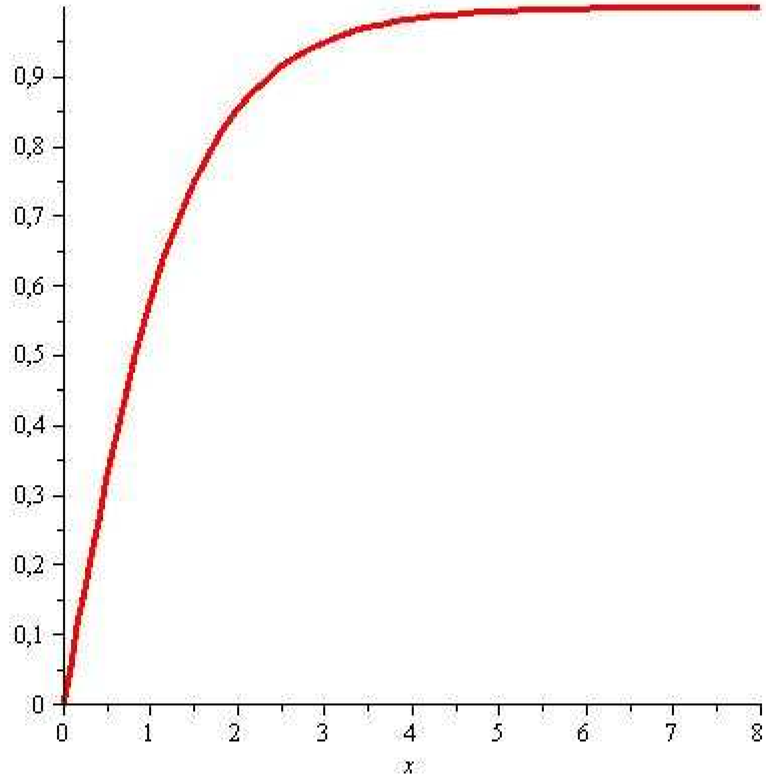
Á basse température, $k_BT << E$, seul le niveau de plus basse énergie est occupé : $\overline{N_1} = N$.

Á haute température, $k_BT >> E$, les 3 niveaux sont occupés : $\overline{N_j} = \frac{N}{3}$.

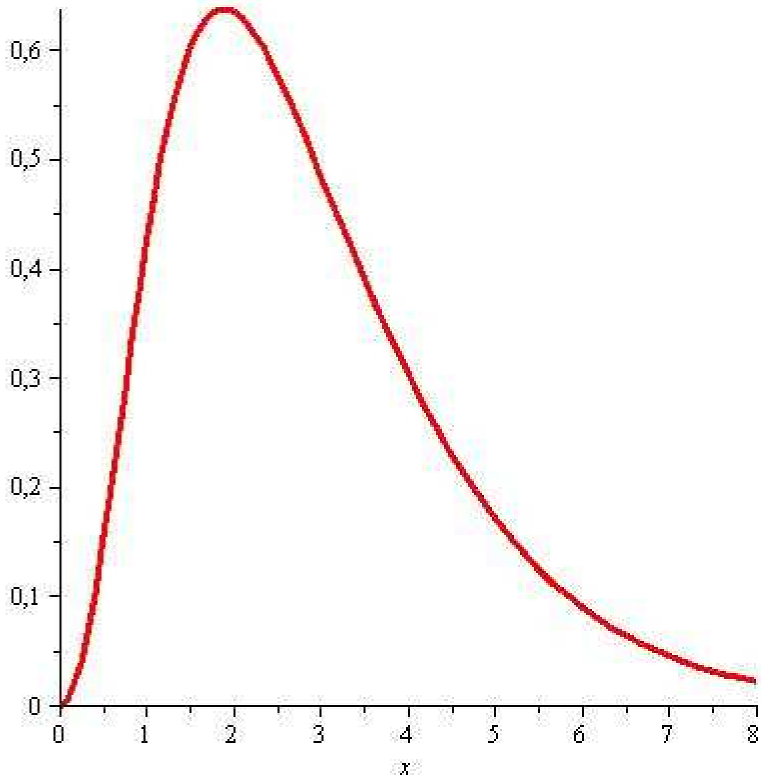
b. $\bar{E} = p_1.E_1 + p_2.E_2 + p_3.E_3 = (p_3 - p_1)E = -E\dfrac{2\text{sh}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}{1+2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)} < 0$.

c. Á basse température, comme seul l'état fondamental est occupé, $\bar{E}$ tend vers – E.
Á haute température, les probabilités d'occupation des 3 niveaux sont identiques, $\bar{E}$ tend vers 0.

d. Qualitativement, on retrouve le cas du système à 2 niveaux. Á basse température, seul le fondamental est occupé et une petite variation de température ne change pas l'énergie du système, C_V tend vers 0. Á haute température, tous les états sont occupés de manière équiprobable. Une petite variation de température ne modifie rien, C_V tend encore vers 0. La capacité thermique C_V n'est non nulle qu'aux alentours de la température T_0 définie par $k_BT_0 \approx \bar{E}$.



0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8
x



0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8
x

Mouvement brownien

1. $m\ddot{x} = -h\dot{x} + F(t)$ (1)

2. Multiplions (1) par x.

$$m x\ddot{x} = -f x\dot{x} + xF(t)$$

En moyenne : $m\langle x\ddot{x}\rangle = -f\langle \dot{x}x\rangle$

or $\frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} = \langle \frac{dx\dot{x}}{dt}\rangle = \langle \dot{x}^2\rangle + \langle x\ddot{x}\rangle \Rightarrow m\frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} = m\langle \dot{x}^2\rangle - f\langle x\dot{x}\rangle$ (2)

3. L'équipartition de l'énergie assure que $\frac{1}{2}m\langle \dot{x}^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$

$$\Rightarrow \langle \dot{x}^2\rangle = \frac{k_BT}{m}$$

4. (2) devient : $\frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} + \frac{f}{m}\langle x\dot{x}\rangle = k_BT \Rightarrow \langle x\dot{x}\rangle = \frac{k_BT}{f}\left(1-e^{-\frac{ft}{m}}\right)$

avec la CI

$$\Leftrightarrow \langle x\dot{x}\rangle = \frac{k_BT}{f}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

5. On a $\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = 2\langle x\dot{x}\rangle = \frac{k_BT}{f}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

$$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{2k_BT}{f}\left(t+\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)\right)$$

si $t \gg \tau$ $\langle x^2\rangle \simeq \frac{2k_BT}{f}t = 2Dt$ avec $D = \frac{k_BT}{m}$

6. $D = 2.2.10^{-14}\ m^2s^{-1}$ et en une seconde la distance vaut $\sqrt{2Dt} = 0{,}2\mu m$

Séparation isotopique

1. mar car rotation.

$\vec{F_{ie}} = m\omega^2 r\vec{e_r} = -\vec{\nabla}E_p \Rightarrow E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \underset{0}{\underset{\parallel}{cte}}$

2. avec le facteur de Boltzmann : $n(r) = n(0)e^{-\frac{E_p}{kT}} = n(0)e^{\frac{m\omega^2r^2}{2k_BT}}$

soit $n(r) = n(0)e^{\frac{M\omega^2r^2}{2RT}}$ avec $M = \mathcal{N}_A m$ et $R = k_B\mathcal{N}_A$

3. a. ^{238}U : $\frac{n(a)}{n(0)} = 22{,}1$ ^{235}U : $\frac{n(a)}{n(0)} = 21{,}5$

3. b. $x_{235}(0) = \frac{n_{235}}{n_{235}+n_{238}} \simeq \frac{n_{235}}{n_{238}}$ d'où $\frac{x_{235}(0)}{x_{235}(a)} \simeq \frac{22{,}1}{21{,}5} = 1{,}03$

Le gaz le + riche en ^{235}U est proche de l'axe de rotation. En renouvelant l'opération on atteint la fraction souhaitée.

Expérience de Kappler

1. Si le miroir tourne de φ le rayon réfléchi tourne de 2φ . On a donc d=2Lφ

2. a) Le théorème d'équipartition de l'énergie donne $\left\langle \frac{1}{2}\mathrm{C}\varphi^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}\mathrm{T}$

d'où
$$\boxed{\langle \varphi^2 \rangle = \frac{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}{\mathrm{C}}}$$

$\langle d^2 \rangle = 4\mathrm{L}\,\langle \varphi^2 \rangle$

d'où
$$\boxed{k_\mathrm{B} = \frac{\mathrm{C}}{4\mathrm{L}^2\mathrm{T}}\,\langle d^2 \rangle = 1,37.10^{-23}\mathrm{J.K}^{-1}}$$

[redacted]

Expérience de Jean Perrin

1. Chaque grain est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\frac{4}{3}\pi a^3(d-1)\mu_{eau}g\overrightarrow{u_z}$$

L'énergie potentielle $\mathrm{E}_p(z)$ d'un grain de coordonnée rst donc

$$\mathrm{E}p_(z) = \frac{4}{3}\pi a^3(d-1)\mu_{eau}gz = \mathrm{A}z \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \frac{4}{3}\pi a^3(d-1)\mu_{eau}g$$

2. Ne nombre moyen de grain est proportionnel au facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{\mathrm{E}_p}{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{A}z}{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}\right)$.

Donc ce nombre décroit en $\exp -z/h$ avec

$$h = \frac{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}{\mathrm{A}} \approx 5.10^{-4}m$$

h estde l'ordre de la hauteur de la cuve et il est donc possible d'observer au microscope la rpartition des grains obéissant à la loi de Bolzmann.

3. On trace $\ln \mathrm{N}$ en fonction de z et on obtient :

$$\ln \mathrm{N} = -0,024z + 4,7$$

On a donc $h = 1/0,024 = 42\mu m$ et finalement

$$\mathbb{N}_\mathrm{A} = \frac{\mathrm{R}}{k_\mathrm{B}} = \frac{3\mathrm{RT}}{4\pi a^3(d-1)\mu_{eau}gh} \approx 7.10^{23}mol^{\ -1}$$