

TH 401

En régime permanent, on peut utiliser les résistances thermiques

$$\vec{j}_{cd} = Q_0 \vec{u}_x \text{ est cte}$$

et $T_3 - T_0 = T_3 - T_2 + T_2 - T_1 + T_1 - T_0 \Rightarrow$ associées en série

$$\Rightarrow T_3 - T_0 = -Q_0 \left(\frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{e_3}{k_3} \right)$$

de plus: $P = h(T_3 - T_e) = Q_0$ en régime permanent

$$\Rightarrow T_0 - T_e = Q_0 \left[\frac{1}{h} + \frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{e_3}{k_3} \right]$$

TH 402.

En régime permanent : bilan en puissance sur un cylindre de hauteur h .

$$R(r) j^2(r) = S j_Q(r)$$

↑
puissance dissipée
par effet Joule
↑
puissance cédée à
l'ext. par conduction

• $0 \leq r \leq R$: $R(r) = \frac{\rho}{\sigma \pi r^2}$ $j(r) = I \frac{r^2}{R^2}$

Poi de fournie: $j_Q(r) = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)$ $S = 2\pi r h$.

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\sigma \pi r^2} \cdot I^2 \frac{r^4}{R^2} = -2\pi r h \lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{I^2}{2\sigma \pi R^4} r \quad \text{d'où } T(r) = \underline{\underline{-\frac{I^2}{4\pi^2 R^4 \sigma h} r^2 + A}}$$

• $R \leq r \leq a$: $R_{TOT} I^2 = -R \left(\frac{dT}{dr} \right) \cdot S$ $R_{TOT} = \frac{\rho}{\sigma \pi R^2}$ $S = 2\pi r h$

$$\Rightarrow \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{I^2}{2\pi^2 \sigma k R^2} \frac{1}{r} \quad \Rightarrow T(r) = \underline{\underline{-\frac{I^2}{2\pi^2 \sigma k R^2} \ln r + B}}$$

Continuité de T en $r=R$ et $r=a$:

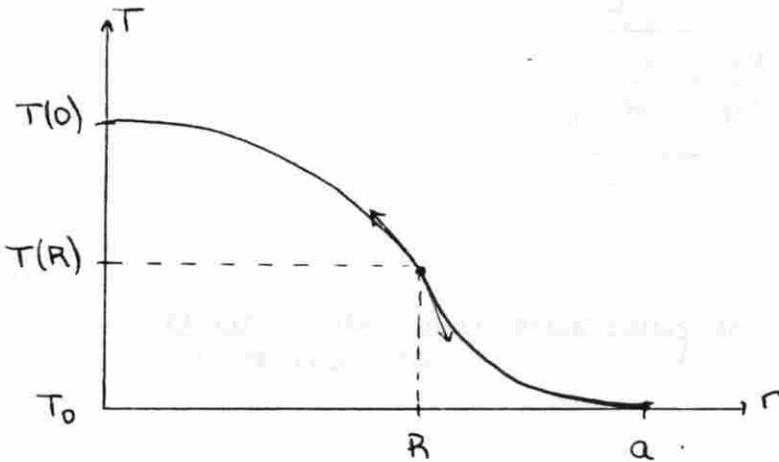
$$\underline{r=a} : T=T_0 = B \frac{I^2 \rho a}{\pi^2 \sigma k R^2} \Rightarrow B = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma k R^2} \rho a.$$

$$\underline{r=R} : T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma k R^2} \rho \ln \frac{a}{R} = A - \frac{I^2}{4\pi^2 \sigma d R^2}$$

D'où :

$$\underline{0 \leq r \leq R} : T(r) = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma k R^2} \rho \ln \frac{a}{R} + \frac{I^2}{4\pi^2 \sigma d R^4} (R^2 - r^2)$$

$$\underline{R \leq r \leq a} : T(r) = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma k R^2} \rho \ln \frac{a}{r}$$



La continuité du flux thermique

en $r=R$ impose :

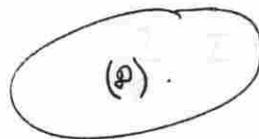
$$d \left(\frac{dT}{dr} \right)_{R^-} = k \left(\frac{dT}{dr} \right)_{R^+}$$

comme $R < d$:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{R^-} < \left(\frac{dT}{dr} \right)_{R^+}$$

TH 403

(10)



$$P = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} \text{ échangé à travers } (S).$$

l'énergie interne de (P) : $U(t) = \iiint_V \mu c T d\tau.$

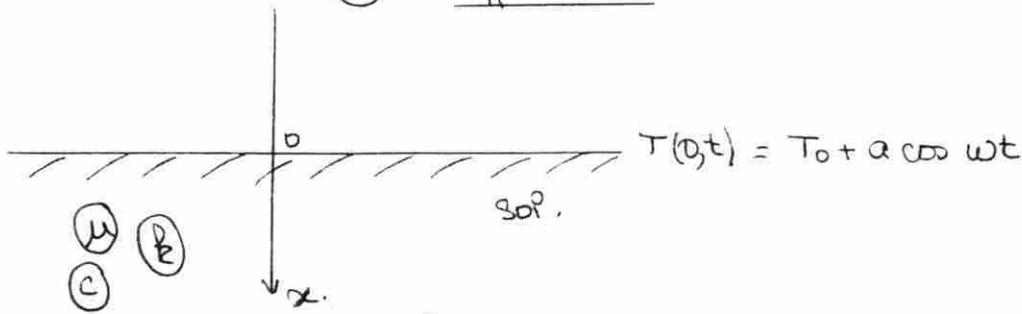
$$- \frac{dU}{dt} = P \Leftrightarrow \iiint_V -\mu c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) d\tau = \iiint_V \text{div} \vec{j} \cdot d\tau.$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{j} + \mu c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0. \quad \text{avec } \vec{j} = -k \text{grad} T$$

d'où $\boxed{\frac{k}{\mu c} \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad D = \frac{k}{\mu c} \quad (2)}$

20 Application:

(2)



a) $T(x,t) = T_0 + a u(x,t)$ complexe.

on cherche $u(x,t)$ sous la forme: $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$

ou injecte dans l'équation de la diffusion (E):

$$D\alpha^2 = \beta$$

avec la forme de $T(0,t)$ on a forcément $\beta = i\omega$

$$\text{et } \alpha = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{\frac{2k}{\mu c \omega}}}$$

b) $\alpha = \pm (1+i) \frac{2\pi}{\lambda}$ $\beta = i\omega = i \frac{2\pi}{T_1}$

$$\Rightarrow u(x,t) = A e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \exp 2i\pi \left(-\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T_1} \right) + B e^{\frac{2\pi x}{\lambda}} \exp 2i\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T_1} \right)$$

onde plane progressive vers les x \rightarrow

onde plane progressive vers les x \leftarrow
ne correspond pas au pb étudié

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} e^{2i\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda} \right)}$$

onde de diffusion thermique, amortie

AN: longueur d'onde $\lambda = 16,3 \text{ m}$.

La vitesse de phase de cette onde: $v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T_1} = \sqrt{\frac{2k\omega}{\mu c}}$ dépend de ω

\Rightarrow phénomène de dispersion $v_{\phi} = 4,45 \text{ cm/jour}$.

c) $\left. \begin{array}{l} T_0 + a = 30^\circ\text{C} \\ T_0 - a = -10^\circ\text{C} \end{array} \right\} \Rightarrow a = 20^\circ\text{C}$ ou prend $t=0$ le 1^{er} juillet

Le sol transmet les variations de T^o avec un retard :

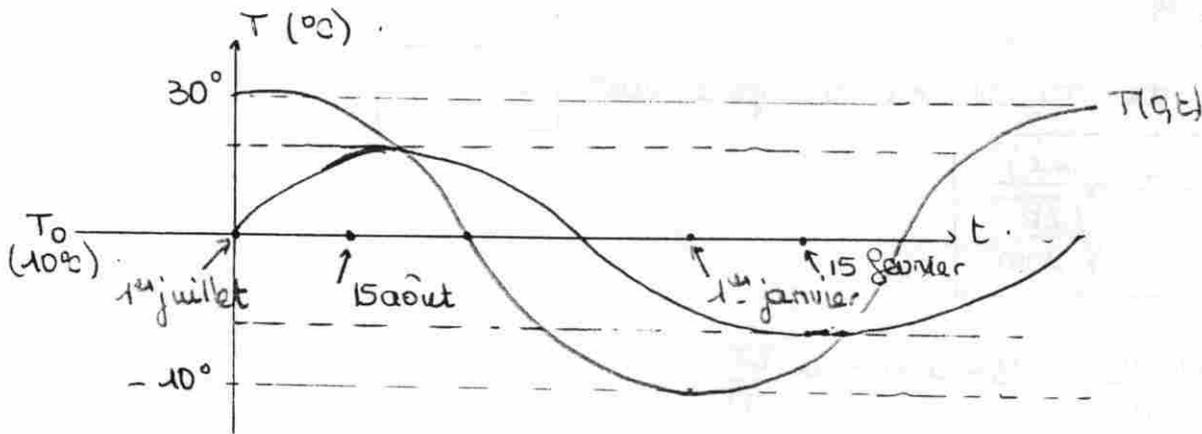
$$T(x,t) = T_0 + a e^{-2\pi x/\lambda} \cos 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right)$$

Maximum : $-\frac{x_p}{\lambda} + \frac{t}{T} = 0 \Rightarrow t = \frac{x_p}{v_p} \approx 45 \text{ jours}$

à 2m de profondeur, la température maximale est atteinte le 15 août. ce maximum vaut 19°C.

Minimum : il est aussi atteint 45 jours plus tard

le minimum est atteint le 15 février et vaut 0,7°C.



(d) Phénomène de dispersion : v_p et λ dépendent de ω .

* année : $\delta = \frac{\lambda}{2\pi} = 2,6 \text{ m}$

* jour / nuit : $\delta \approx 14 \text{ cm}$

l'onde est totalement amortie lorsqu'elle arrive à la profondeur $x_p = 2 \text{ m}$.

Variation annuelle de T^o : $\Delta T = 2a e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} = 2^o$

$\Leftrightarrow \boxed{X = 7,60 \text{ m}}$

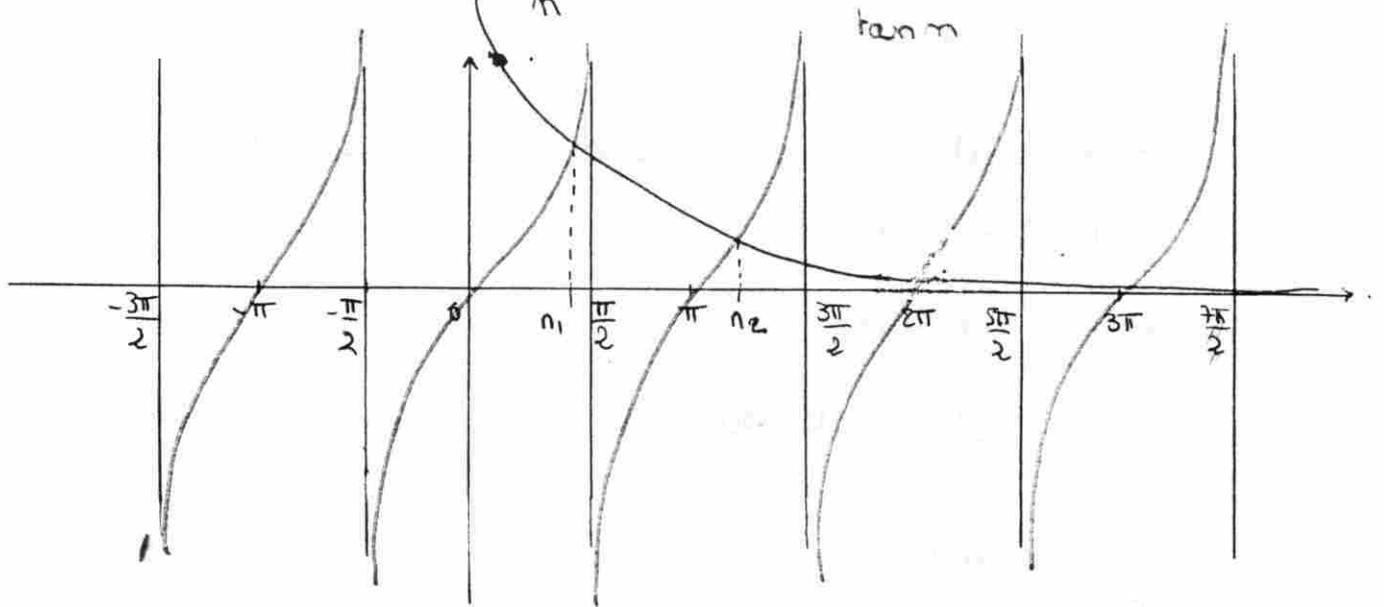
TH 404

(a) @ $\theta = \theta(x,t)$ par invariance du pb en y et z .

(b) Eq. de la chaleur : $\boxed{\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}}$

$\Rightarrow \boxed{a \frac{\partial \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}}$

(b) on trace $\tan n$ et $\frac{B}{n}$:



⇒ infinité de solutions en n donc en \mathbb{R} puisque \tan est périodique

$$\forall i \tan n_i = \frac{B}{n_i}$$

$$\boxed{\theta_i(x,t) = A_i \cos \frac{n_i x}{d} e^{-n_i^2 \frac{at}{d^2}}}$$

$$(4^o) \quad \theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(x,t)$$

(a) L'équation de diffusion étant linéaire et les θ_i satisfaisant aux conditions aux limites du pb (elles mêmes linéaires), $\theta(x,t)$ est solution du pb -

conditions initiales : on devrait avoir $\theta = T_0 - T_f$ à $t=0 \quad \forall x$.
ce qui n'est pas le cas pour les θ_i individuellement.

Le choix convenable des A_i peut satisfaire les conditions initiales :

$$\sum_i A_i \cos \frac{n_i x}{d} = T_0 - T_f \quad \forall x$$

$$(b) \quad I_{ij} = \int_{-d}^d \cos\left(\frac{n_i x}{d}\right) \cos\left(\frac{n_j x}{d}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-d}^d \left[\cos\left(\frac{(n_i - n_j)x}{d}\right) + \cos\left(\frac{(n_i + n_j)x}{d}\right) \right] dx$$

si $i \neq j$: $n_i \neq n_j$ $I_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{n_i - n_j} \left[\sin\left(\frac{(n_i - n_j)x}{d}\right) \right]_{-d}^d + \frac{d}{n_i + n_j} \left[\sin\left(\frac{(n_i + n_j)x}{d}\right) \right]_{-d}^d \right]$

(a) on a une pb à 1 dimension d'espace, linéaire en $-d$ et $+d$, avec des conditions aux limites analogues à celles rencontrées dans une pb d'ondes stationnaires (réflexion d'une onde entre 2 plans //

$$\Rightarrow \theta(x,t) = f(x) g(t)$$

$$a f''(x) g(t) = f(x) g'(t)$$

$$\Rightarrow a \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = cte \text{ car } x \text{ et } t \text{ sont indépendantes.}$$

si $cte \leq 0$: Les solutions en x ne satisferont pas les conditions aux limites; de plus, on aurait une λ des temps non bornés.

Donc :

$$\begin{cases} \frac{f''(x)}{f(x)} = -k^2 \text{ avec } k > 0 \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -ka^2 \end{cases}$$

Est homogène à l'inverse d'une longueur.

(b) $g(t) = \alpha e^{-ka^2 t}$

$f(x) = \beta \cos(kx + \varphi)$. par symétrie en x : $f(x) = f(-x) \Rightarrow \varphi = 0$.

D'où $\theta(x,t) = A e^{-ka^2 t} \cos kx$

(a) Continuité des flux -thermique en $x = \pm d$, $\forall t$:

$$j_x(d) \cdot S = R(T(d) - T_f) \cdot S$$

$$\Rightarrow -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=d} = R \theta(d)$$

ce qui donne: $\lambda k \sin kd = R \cos kd$

soit: $\tan kd = \frac{R}{\lambda k}$

$B = \frac{Rd}{\lambda}$ $m = kd$ cela donne: $\tan m = \frac{B}{m}$

$$\Rightarrow I_{ij} = d \left[\frac{\sin(n_i - n_j)}{n_i - n_j} + \frac{\sin(n_i + n_j)}{n_i + n_j} \right]$$

$$= \frac{d}{n_i^2 - n_j^2} \left[(n_i + n_j) \sin(n_i - n_j) + (n_i - n_j) \sin(n_i + n_j) \right]$$

$$= \frac{2d}{n_i^2 - n_j^2} (n_i \sin n_i \cos n_j - n_j \sin n_j \cos n_i)$$

$$I_{ij} = \frac{2d}{n_i^2 - n_j^2} \left(\frac{n_i \tan n_i - n_j \tan n_j}{\cos n_i \cos n_j} \right)$$

ou $n_i \tan n_i = B = n_j \tan n_j$ d'où

$$I_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Si $i=j$:

$$I_{ii} = \int_{-d}^d \cos^2 \frac{n_i x}{d} dx = \int_{-d}^d \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2n_i x}{d} \right) dx$$

$$= d + \frac{1}{2} \frac{d}{2n_i} \left[\sin \frac{2n_i x}{d} \right]_{-d}^d$$

$$I_{ii} = d + \frac{2d}{4n_i} \sin 2n_i$$

$$\Rightarrow I_{ii} = d \left[1 + \frac{\sin 2n_i}{2n_i} \right]$$

② $\sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \frac{n_j x}{d} = T_0 - T_f$

$$\Rightarrow \int_{-d}^d \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \frac{n_j x}{d} \cos \frac{n_i x}{d} \right) dx = \int_{-d}^d (T_0 - T_f) \cos \frac{n_i x}{d} dx$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} A_j I_{ij} = (T_0 - T_f) \frac{d}{n_i} \left[\sin \frac{n_i x}{d} \right]_{-d}^d$$

$$\Rightarrow d \left[1 + \frac{\sin 2n_i}{2n_i} \right] A_i = (T_0 - T_f) \frac{d}{n_i} 2 \sin n_i$$

D'où

$$A_i = (T_0 - T_f) \frac{2 \frac{\sin n_i}{n_i}}{1 + \frac{\sin 2n_i}{2n_i}}$$

avec $T_0 - T_f = \theta_0$

D'où
$$\theta(x,t) = \theta_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \frac{\sin n_i}{n_i}}{1 + \frac{\sin 2n_i}{2n_i}} \cos n_i \frac{x}{d} e^{-n_i^2 \frac{at}{d^2}}$$

(50)

(a) si $\frac{at}{d^2}$ grand les termes en $e^{-n_i^2 \frac{at}{d^2}}$ seront négligeables (pour $i > 1$) devant le 1^{er} terme = en effet n_i augmente avec i .

$$\theta(x,t) \approx \theta_0 \frac{4 \sin n_1}{2n_1 + \sin 2n_1} \cos n_1 \frac{x}{d} e^{-n_1^2 \frac{at}{d^2}}$$

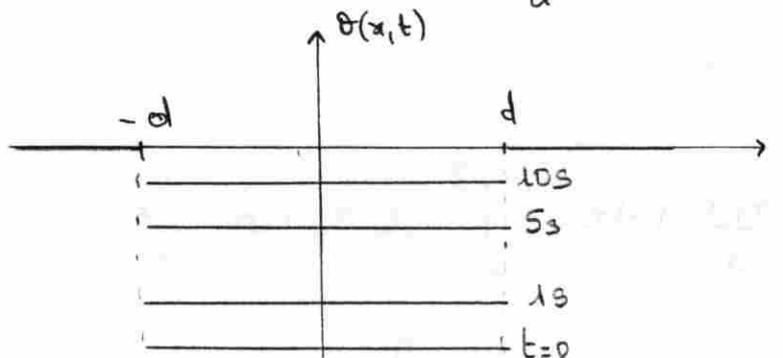
AN: $\frac{at}{d^2} \geq 0,3 \Rightarrow t \geq \frac{0,3 d^2}{a}$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho c} = 1,74 \sqrt{10^{-4}} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

$$t \geq 43 \text{ ms.}$$

(b) $T_0 < T_p$. $\theta_0 < 0$.

Cas B petit: alors n_1 vérifie $\tan n_1 = \frac{B}{n_1}$ alors n_1 petit.
d'où $n_1 \approx \sqrt{B}$.

alors, $\theta(x,t) \approx \theta_0 \cos \frac{\sqrt{B}x}{d} e^{-\frac{Bt}{d^2}} \approx \theta_0 e^{-\frac{Bt}{d^2}} \approx$ indépendant de x .

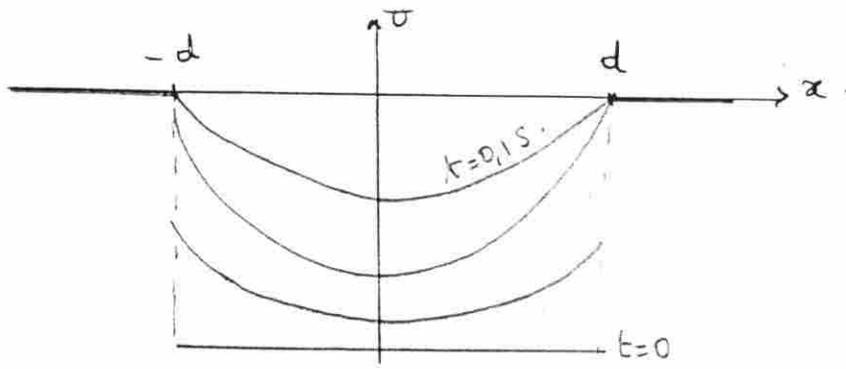


$B = \frac{hd}{\lambda}$ $\left\{ \begin{array}{l} B \text{ petit: échanges thermiques plaque - fluide réduits} \\ B \text{ grand: très bonne conduction dans la plaque} \end{array} \right.$

\Rightarrow on assiste à une uniformisation très rapide des températures dans la plaque

Cas B grand: $n_1 \approx \frac{\pi}{2}$ et $\theta(x,t) \approx \frac{4}{\pi} \theta_0 \cos \frac{\pi x}{2d} e^{-\frac{\pi^2 at}{2d^2}}$

numériquement, au centre: $\theta(0,t) \approx \frac{4}{\pi} \theta_0 e^{-17,2t}$ (temps).



$B = \frac{Rd}{\lambda}$ grand } R grand: apport thermique du fluide important
 } d petit: mauvaise propagation thermique ds la plaque
 ⇒ Les bords atteignent plus vite que le centre la T^0 du fluide.

③ $B = 2,62 \cdot 10^{-2}$ petit. D'où $\tau_1 \approx \sqrt{B} = 0,162$

on pourra donc considérer très vite ($t > \tau_0$) la température comme uniforme dans la plaque -

on veut $t / \tau_0 = 1$ / $|T_0| e^{-Bat/d^2} = 1^\circ C$. $T_0 = 60^\circ C$.

⇒ $t = 22,4 s$.

TH 405.

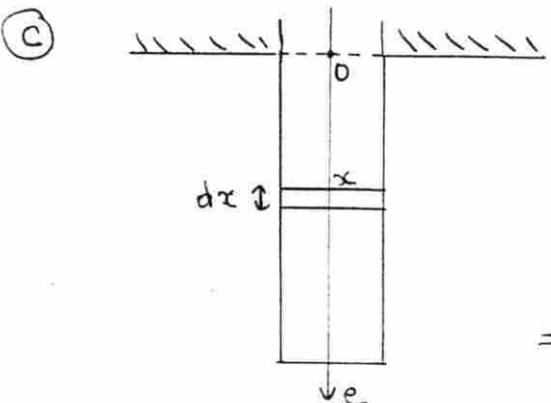
⑩

① Le flux thermique conducto-convectif sur la surface He en contact avec l'extérieur : $\Phi_1 = He h_c (T_{pe} - T_e) = \frac{1}{R_1} (T_{pe} - T_e)$.

⇒ $R_1 = 1/He h_c$

② Le flux thermique diffusif sur la surface He encastrée vaut: (selon ox).

$\Phi_2 = He e d \frac{(T_1 - T_{pe})}{l}$ ⇒ $R_2 = \frac{1}{d} \frac{e}{He}$



$He [j_{cd}(x) - j_{cd}(x+dx)] - 2h_i H dx (T(x) - T_i) = 0$
 en régime stationnaire

avec $j_{cd} = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)$

⇒ $\lambda He \frac{d^2 T}{dx^2} - 2R_i H (T - T_i) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2R_1}{\lambda e} (T - T_i) = 0$$

$$\text{Soit: } \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{a^2} (T - T_i) = 0$$

Solution: $T(x) = A e^{-x/a} + B e^{x/a} + T_i$

comme $L \gg a$: $x \rightarrow \infty$ T reste bornée donc $B=0$.

à $x=0$: $T=T_1 = A+T_i \Rightarrow T(x) = T_i + (T_1 - T_i) e^{-x/a}$

Pour les échanges : $\begin{cases} \Phi_0 = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right) \cdot He = \frac{\lambda He}{a} (T_1 - T_i) \text{ (en } x=0) \\ \Phi_\infty = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi_0 = \frac{1}{R_R} \cdot (T_1 - T_i) \Rightarrow R = \frac{a}{\lambda He}$$

④ En régime permanent : $\Phi_{ce} = \Phi_{cd} = \Phi_0$ ce qui correspond à des résistances associées en série :

$$R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_{TOT} = \frac{1}{He h_e} + \frac{e}{\lambda He} + \frac{a}{\lambda He} = \frac{1}{He} \left[\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} \right]$$

$$\Phi = \frac{1}{R_{TOT}} (T_e - T_i)$$

AN: $a = 27,4 \text{ cm}$ $\Phi = -117 \text{ W}$

La T^o varie sur quelques 30 cm à l'intérieur - Les murs intérieurs ont pratiquement la $T^o = T_i$.

$$T_e - T_{pe} = \frac{\Phi}{He h_e} = -5,2 \text{ K} \Rightarrow T_{pe} = 278,2 \text{ K}$$

$$T_{pe} - T_i = \frac{\Phi e}{He \lambda} = -6,2 \text{ K} \Rightarrow T_1 = 284,4 \text{ K}$$

⑤ En représentant les mêmes calculs :

$$R_1 = \frac{a_1}{\lambda He} \text{ avec } a_1 = \sqrt{\frac{\lambda e}{2 h_e}} = 0,458 \text{ m}$$

$$R_2 = \frac{e}{\lambda e H}$$

$$R_3 = \frac{a_3}{\lambda H e} \quad \text{avec} \quad a_3 = \sqrt{\frac{de}{2R_i}} = 0,274 \text{ m}$$

$$R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{H e d} [a_1 + e + a_3] = \frac{0,632}{2,5 \times 0,3 \times 5}$$

$$\Phi = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = -118,5 \text{ W}$$

valeurs très voisines de celles du 10° pour Φ et $a_3 \approx a$.

30

Partie vitrée : $\Phi_v = \frac{T_e - T_i}{R_v}$

$$R_v = \frac{1}{S_v} \left[\frac{1}{R_i} + \frac{e_v}{\lambda} + \frac{1}{R_e} \right]$$

Partie non vitrée : $\Phi_m = \frac{T_e - T_i}{R_m}$

$$R_m = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{R_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{R_e} \right]$$

$$\Phi_{TOT} = \Phi_v + \Phi_m = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} \Rightarrow$$

$$R_{TOT} = \left[\frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_m} \right]^{-1} \quad \text{association en //}$$

$$\Phi_{TOT} = 1368 \text{ W}$$

TH 406

10 Bilan énergétique entre t et $t+dt$, pour une largeur dx d'absorbeur :

$$a) \quad d\dot{U} = \frac{Ma}{L} dx C_a dT_a = R_f l dx (T - T_a(x,t)) dt + R_o l dx (T_o - T_a(x,t)) dt + R_{ds} l dx$$

$$\text{D'où : } \frac{Ma}{eL} C_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial t} \right) = R_f (T - T_a) + R_o (T_o - T_a) + R_{ds}$$

b) Bilan énergétique pendant dt pour une largeur dx de fluide :
 $\mu c l dx dT = R_f (T_a(x,t) - T(x,t)) l dx$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t} dt + v \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right)$$

$$\Rightarrow R_f (T_a - T) = \mu c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$c) \quad Q_a \neq 0 \quad R_{hg}(T - T_a) + R_{h0}(T_0 - T_a) + R_{js} = 0$$

$$\Rightarrow T_a = \frac{R_{js} + R_{h0}T_0}{R_{h0} + R_{hg}} + \frac{R_{hg}}{R_{h0} + R_{hg}} T$$

ou remplace dans (5) :

$$\frac{R_{hg}}{R_{h0} + R_{hg}} (R_{js} + R_{h0}(T_0 - T)) = \mu c \left[\frac{dT}{dt} + v \frac{dT}{dx} \right]$$

(20)

a) $D = e l v$ débit volumique du fluide.

et l'équation différentielle devient : $T = T(x)$.

$$F(R_{js} + R_{h0}(T_0 - T)) = \mu e v c \left(\frac{dT}{dx} \right) = \frac{\mu c D}{e} \left(\frac{dT}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow F \left(\frac{R_{js}}{R_{h0}} + T_0 \right) = \frac{\mu c D}{e R_{h0}} \left(\frac{dT}{dx} \right) + FT$$

$\vartheta = T_0 + \frac{R_{js}}{R_{h0}}$ est la température fictive de l'air ambiant si l'absorbeur n'était en contact qu'avec l'air et pas le fluide, avec la même apport d'énergie solaire.

R_{0eL} puissance échangée par l'absorbeur avec l'air ambiant pour un écart de température de $1^\circ C$.

$\mu c D$ capacité thermique transportée par le fluide par unité de temps

$\alpha = \frac{R_{0eL}}{\mu c D}$ exprime le rapport entre ces 2 grandeurs = pertes par unité de capacité thermique du système.

$$b) \quad F \vartheta = \frac{L}{d} \left(\frac{dT}{dx} \right) + FT \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{L}$$

$$\boxed{T + \frac{1}{F \alpha} \left(\frac{dT}{dy} \right) = \vartheta}$$

$$\text{D'où} \quad T(y) = \vartheta + A e^{-F \alpha y}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } y=0 : x=0 \quad T = T_c = \vartheta + A \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{T(y) = \vartheta + (T_c - \vartheta) e^{-F \alpha y}}$$

c) $T_s = T(1) = \theta + (T_e - \theta) e^{-F\alpha}$

$T_m = \frac{1}{L} \int_0^L T \cdot dx = \int_0^1 T(y) dy = \theta + \frac{(T_e - \theta)}{F\alpha} [1 - e^{-F\alpha}]$

F est un coefficient compris entre 0 et 1.

Pour avoir un meilleur capteur, il faut minimiser les pertes vers l'air ambiant: $h_0 \rightarrow 0$ donc il faut avoir F proche de 1.

d) Le capteur échange le fluide de T_e à T_s . une masse $\mu CD = \mu D$ traverse le capteur par unité de temps. d'où:

$P = \mu CD (T_s - T_e) = \frac{h_0 L P}{\alpha} [(T_e - T_s) (1 - e^{-F\alpha})]$

Cas $\alpha \ll 1$: $P \approx h_0 L F (T_e - T_s)$

$\alpha \ll 1 \Rightarrow h_0$ petit très faibles pertes dans l'air ambiant donc:

$P \approx$ puissance reçue par rayonnement solaire

soit $P \approx R L \theta_s$

on a alors une autre expression de T_s : $T_s \approx T_e + \frac{R L R_{js}}{\mu CD}$

e) Application numérique:

$\alpha = \frac{h_0 L}{\mu CD} = 0,51$

$(D = \frac{14 \cdot 10^{-6}}{3,6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$

$\theta = T_0 + \frac{R_{js}}{h_0} = 443 \text{ K} = 170^\circ \text{C}$

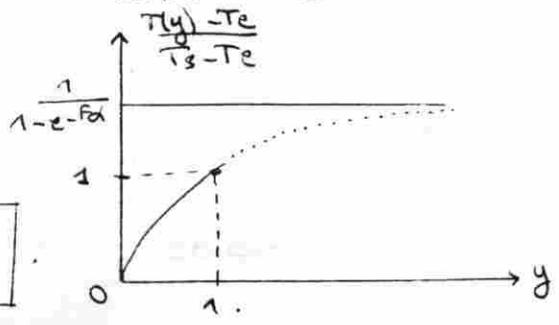
$T_s = \theta + (T_e - \theta) e^{-F\alpha}$

ne connaissant pas h_0 , on le suppose $\gg h_0$ donc $F \approx 1$

alors $T_s = 80^\circ \text{C}$

et $T_m = 52,5^\circ \text{C}$

Enfin: $P = \mu CD (T_s - T_e) = 934 \text{ W}$



(30)

a) Dans l'équation aux dérivées partielles du (10) (c) :

$$Fg = \frac{\mu \epsilon c}{R_0} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + TF + F\mu \epsilon c v \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

avec $F=1$: $\tau = \frac{\mu \epsilon c}{R_0}$ correspond à la constante de temps des transferts conduction-convectifs.

avec $\alpha = \frac{R_0 L P}{\mu c D} = \frac{R_0 L P}{\mu c v^2 v}$ on a $\mu \epsilon c = \frac{R_0 v}{\alpha v}$

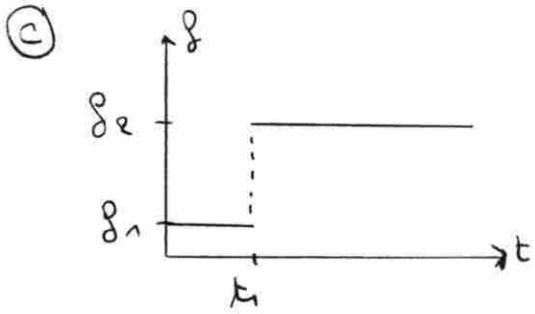
d'où $\tau = \frac{L}{\alpha v}$

b) $T(x,t) = T_e e^{-x/v\tau} + e^{-t/\tau} \int_{t-x/v}^t g e^{u/\tau} \frac{du}{\tau}$

si $g = cte$: $T(x,t) = T_e e^{-x/v\tau} + e^{-t/\tau} g \left[e^{u/\tau} \right]_{t-x/v}^t$

$$T(x,t) = T_e e^{-x/v\tau} + g \left[1 - e^{-x/v\tau} \right]$$

$\Rightarrow T(x,t) = T(x) = g + (T_e - g) \left[e^{-x/v\tau} \right]$
avec $v\tau = \frac{\alpha}{L}$ d'où le résultat



Pour $t < t_1$: régime stationnaire établi à $T_s = T_{s1} = g_1 + (T_e - g_1) e^{-\alpha}$

Pour $t - \frac{x}{v} < t_1 < t$: (soit $t_1 < t < t_1 + \frac{x}{v}$) régime variable : $T_s = T_s(t)$

Pour $t > t_1 + \frac{x}{v}$: régime stationnaire à $T_s = T_{s2} = g_2 + (T_e - g_2) e^{-\alpha}$

En régime variable : $T(x,t) = T_e e^{-x/v\tau} + e^{-t/\tau} \left[\int_{t-x/v}^{t_1} g_1 e^{u/\tau} \frac{du}{\tau} + \int_{t_1}^t g_2 e^{u/\tau} \frac{du}{\tau} \right]$

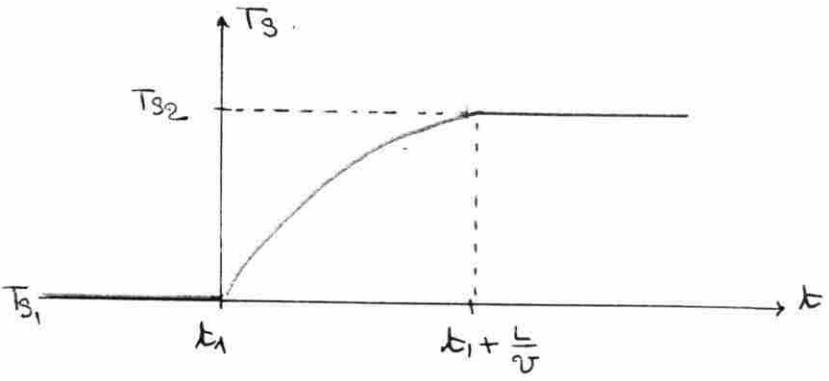
$$T = T_0 e^{-x/v\tau} + e^{-t/\tau} \left[\rho_1 \left[e^{u/\tau} \right]_{t-\frac{x}{v}}^{t_1} + \rho_2 \left[e^{u/\tau} \right]_{t_1}^t \right]$$

$$= T_0 e^{-x/v\tau} + \rho_1 \left(e^{(t_1-t)/\tau} - e^{-x/v\tau} \right) + \rho_2 \left(1 - e^{-(t_1-t)/\tau} \right)$$

D'où $T_S(t) = \rho_2 + (T_0 - \rho_1) e^{-x/v\tau} + (\rho_1 - \rho_2) e^{-(t_1-t)/\tau}$

$T_S(t_1) = T_{S1}$
 $T_S(t_1 + \frac{x}{v}) = T_{S2}$

Allure de $T_S(t)$ pour $\rho_1 < \rho_2$:



d) $\alpha = \frac{\rho_0 \rho L}{\mu C D} = 0,514$ ne change pas.

$\tau = \frac{\mu C D}{\rho_0} = 8 \cdot 10^3 \text{ s}$

D'où $\alpha \tau = 4112 \text{ s}$

$\rho_1 = T_0 + \frac{R_j \rho_1}{h_0} = 30^\circ \text{C}$
 $\rho_2 = T_0 + \frac{R_j \rho_2}{h_0} = 170^\circ \text{C}$

D'où $T_{S1} = 48,4^\circ \text{C}$
 $T_{S2} = 80,3^\circ \text{C}$

Résolution de problème

L'iceberg

Exemple de résolution

On peut, par exemple, prendre un iceberg sphérique de rayon R tel que

$$\mu \frac{4}{3} \pi R^3 = m = 10^{10} \text{ kg}$$

avec $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (la majeure partie est immergée), soit $R \approx \left(\frac{3 \times 10^{10}}{4\pi \times 10^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 134 \text{ m}$.

On considère que les échanges thermiques se font avec l'eau de mer à $T \approx 10^\circ \text{C} = 283 \text{ K}$ car h est beaucoup plus important avec l'eau.

La surface d'échange est donc :

$$S \approx 4\pi R^2$$

En supposant que cette surface d'échange ne change pas (alors que le glaçon fond...) un bilan énergétique donne :

$$\Delta m L_{fus} = h (T_{fluide} - T) S \Delta t$$

soit

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{3 h (T_{fluide} - T) 4\pi R^2 \Delta t}{4\mu\pi R^3 L_{fus}} = \frac{3 h (T_{fluide} - T) \Delta t}{\mu R L_{fus}} = \frac{3 \times 10^2 \times 10 \times 86400}{10^3 \times 134 \times 333 \times 10^3} = 0,5\%$$

Lors du trajet de 140 jours, une bonne partie de l'iceberg aura donc disparu, mais on peut espérer en conserver : on peut estimer grossièrement la quantité restant à $(1 - 5 \times 10^{-3})^{140} \approx 50\%$.