Corrigé planche n° 20.

TH 201

(1°) Compression isotherme $T = cte$

$$\delta W = -P\,dV = -\frac{RT}{V-b}\,dV + \frac{a}{V^2}\,dV$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{1\to 2} = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a\,\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}}$$

(2°) $b \ll V$: $W_{1\to 2} \quad RT \ln \frac{V_2}{V_1} + a\,\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} + RT \ln \frac{1-\frac{b}{V_2}}{1-\frac{b}{V_1}}$

au 1er ordre en $\frac{1}{V}$ cela donne : $\boxed{W_{1\to 2} \# RT \ln \frac{V_2}{V_1} + (a - RTb)\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)}$

(3°) le gaz se comporte comme un gp si $W_{1\to 2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{a}{Rb}}$$

Tangente horizontale en Amagat : $\left(\frac{\partial (PV)}{\partial P}\right)_T = 0$.

or : $PV = RT + pb - \frac{a}{V} + \frac{ab}{V^2}$

aux faibles pressions : $PV \# RT + pb - \frac{a}{V} \# RT + p\left(b - \frac{a}{PV}\right)$

$$\# RT + p\left(b - \frac{a}{RT}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial (PV)}{\partial P}\right)_T = b - \frac{a}{RT} = 0 \quad \text{pour } T = T_1.$$

AN: $T_1 = 1014\ K$,

TH 202

(1°) Etat initial : $P_0 = \frac{m_0 g}{S}$

transformation irréversible à $P_{ext} = (m_0 + m)\frac{g}{S} = P_0\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)$.

" adiabatique : $Q = 0 \Rightarrow \Delta U = W$.

$$m C_V (T_1 - T_0) = - P_1 (V_1 - V_0) \qquad P_1 = P_0 \left(1 + \frac{m}{m_0}\right)$$

$$\frac{mR}{\gamma - 1}\left[T_1 - T_0\right] = - P_0 \left(1 + \frac{m}{m_0}\right)(V_1 - V_0).$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\left[P_1 V_1 - P_0 V_0\right] = - P_0 \left(1 + \frac{m}{m_0}\right)(V_1 - V_0). \qquad \text{avec } V_0 - V_1 = S \Delta h_1$$

$$\Rightarrow + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{m}{m_0}\right) V_0 = 2\left(1 + \frac{m}{m_0}\right) S \Delta h_1 \qquad \text{or } V_0 = S h.$$

D'où $\boxed{\Delta h_1 = \frac{m h}{\gamma (m + m_0)}}$

<u>Température finale</u>: $\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_0}{T}\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)(V_0 - S\Delta h_1)$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_0 \left[\left(1 + \frac{m}{m_0}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{m}{m_0}\right]}.$$

2° Transformation adiabatique reversible:

$P_0 V_0^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$ avec $P_2 = P_0\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)$ aussi.

$V_0 = S h$ et $V_2 = S(h - \Delta h_2)$.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h_2 = h \left[1 - \left(1 + \frac{m}{m_0}\right)^{-1/\gamma}\right]}.$$

$$T' = T_0 \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{T' = T_0 \left(1 + \frac{m}{m_0}\right)^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}}$$

3° <u>$m \ll m_0$</u>:
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta h_1 = \Delta h_2 = \frac{h}{\gamma}\frac{m}{m_0} \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{m}{m_0}. \\ T = T' = T_0 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{m}{m_0}\right] \quad - - - - \end{array}\right.$$

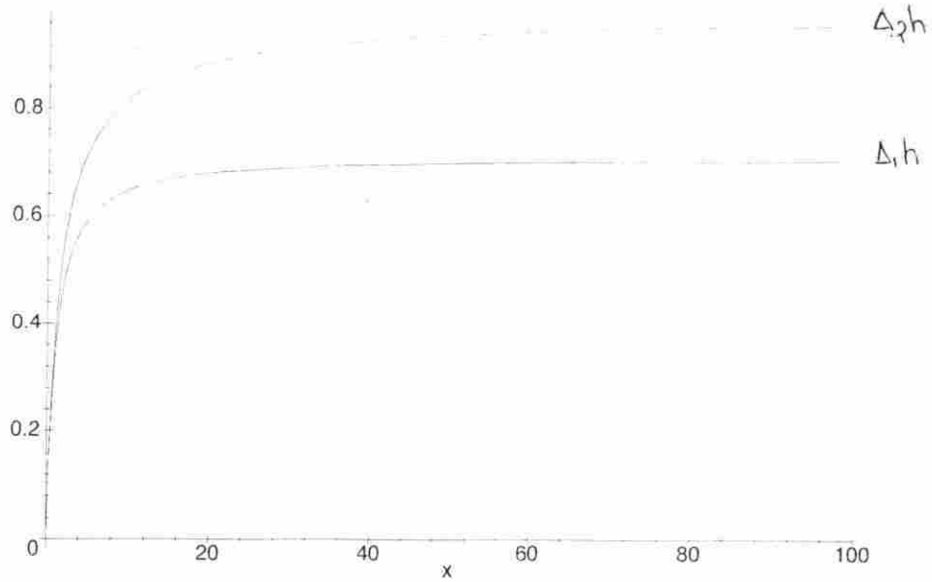
on a alors 2 transf. <u>infinitésimales réversibles adiabatiques</u>

<u>$m \gg m_0$</u>: $\Delta h_1 = \frac{h}{\gamma}\left(1 - \frac{m_0}{m}\right)$ au 1er ordre en $\frac{m_0}{m}$

$\Delta h_2 = h\left(1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^{1/\gamma}\right) > \Delta h_1$.

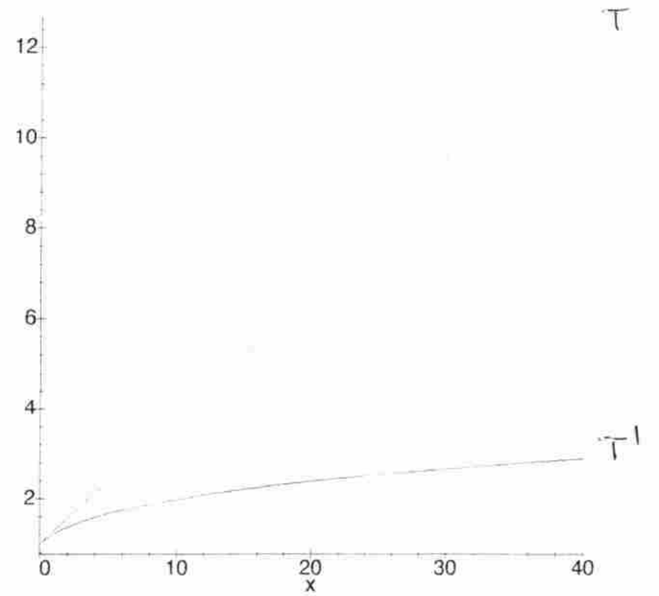
```
STUDENT > plot({x/(1.4*(1+x)),(1-(1+x)^(-1/1.4))},x=0..100,color=b
          lack,title=`comparaison des enfoncements`);
```

comparaison des enfoncements




```
STUDENT > plot({1+0.4*x/1.4,(1+x)^(0.4/1.4)},x=0..40,color=black,t
          itle=`Températures finales`);
```

Températures finales




```
STUDENT >
```

$$\begin{cases} T = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\dfrac{m}{m_0}\,T_0\left[1+\dfrac{m_0}{m}\left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right] . \\ T' = T_0\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[1+\dfrac{m_0}{m}\left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right] < T . \end{cases}$$

1°) $mc\,(T_f - T_2) + K\,(T_f - T_1) = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{T_f = \frac{mcT_2 + KT_1}{K + mc} = 29{,}6\ °C}$$

2°) Pendant le temps dt élémentaire, pour une masse dm de fluide du serpentin qui passe de T_2 à T :

$dm\,c\,(-T_2 + T) + K\,dT = 0.$ avec $Dm = D\,dt$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{Dc}{K}(T - T_2) = 0$$

D'où $T - T_2 = A\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{K}{Dc} = 10'\,8''$

A $t=0$: $T = T_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{T(t) = T_2 + (T_1 - T_2)\,e^{-t/\tau}}$

Lorsque 200g de liquide ont circulé : $t = 100\,s$.

$\underline{T(100\,s) = 30{,}4°C}$.

$\underline{t \to \infty : T \to T_2}$ le fluide impose sa t° au calorimètre

3°) $dm\,c\,(T - T_2) + K\,dT + a\,(T - T_{ext})\,dt = 0.$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{Dc}{K}(T - T_2) + \frac{a}{K}(T - T_{ext}) = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{(Dc + a)T - cDT_2 - aT_{ext}} = -\frac{1}{K}\,dt$$

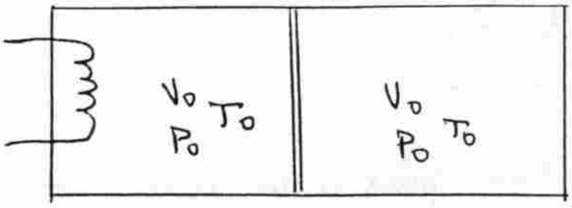
$$\Rightarrow \boxed{\ln \frac{(Dc+a)T - cDT_2 - aT_{ext}}{(Dc+a)T_1 - cDT_2 - aT_{ext}} = -\frac{cD + a}{K}\,t}$$

$t \to \infty$: $\dfrac{dT}{dt} \to 0$ alors $T \to \boxed{T_{lim} = \dfrac{aT_{ext} + cDT_2}{a + cD} = 95{,}3°C.}$

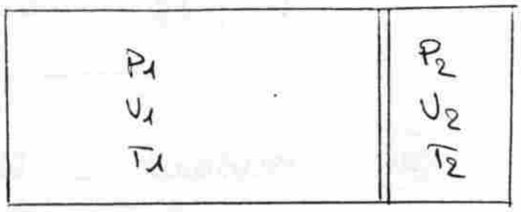
TH 205

(1°)

Etat initial :



Etat final :



Equilibre mécanique : $p_1 = p_2 = 3p_0 = 3\,\text{atm}$.

Le compartiment (2) évolue en adiab. réversible :

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_0 \left(\frac{1}{3}\right)^{1/\gamma} = 1{,}03\,L}$$

alors $$\boxed{T_2 = T_0 \frac{P_2 V_2}{P_0 V_0} = 422\ K}$$

on en déduit $$\boxed{V_1 = 2V_0 - V_2 = 2{,}97\,L}$$

et $$\boxed{T_1 = T_0 \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} = 1216\ K}$$

(2°)

$$\Delta U_1 = n \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = \frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_0V_0) = \underline{1036{,}5\ J}$$

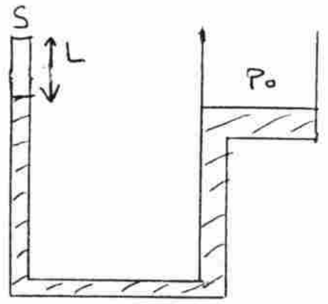
$$\Delta U_2 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_0) = \frac{1}{\gamma-1}(P_2V_2 - P_0V_0) = \underline{163{,}5\ J}$$

1er principe au système entier : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \underset{=0}{Q} + \underset{W_{elec}}{W}$

car $W_p = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{W_{elec} = \Delta U = 1200\ J}$$

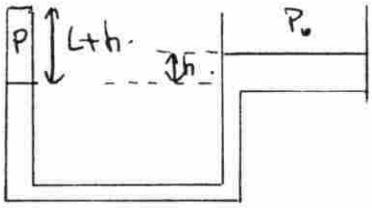
1°



État initial : P_0, SL, T_1

État final : $P, S(L+h), T_2$

$$PS(L+h) = P_0 S L \frac{T_2}{T_1}$$



Équilibre du mercure :

$$P = P_0 + \rho g h = (H_0 + h)\rho g.$$

$$\Rightarrow \boxed{(H_0+h)(L+h) = H_0 L \frac{T_2}{T_1}}$$

on en déduit h par l'éq du 2e degré : $h^2 + 0{,}76\,h - 0{,}278 = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{h = 0{,}146\,\text{m} = 14{,}6\ \text{cm}}.$$

2° $\delta Q_{rev} = nC_V dT - PdV$.

à chaque instant, P et x (donc V) la dénivellation sont liés :

$$P = P_0 + \rho g x = (H_0 + x)\rho g \quad \text{avec} \quad V = S(L+x)$$

$$\Rightarrow dV = S\,dx.$$

$$dP = \rho g\,dx \Rightarrow dV = \frac{S}{\rho g} dP = \frac{S H_0}{P_0} dP.$$

$$\Rightarrow Q_{rev} = \frac{nR}{\gamma-1}\left[T_2 - T_1\right] - \frac{S H_0}{P_0}\int_{P_0}^{P} P\,dP$$

$T_1 nR = P_0 S L$

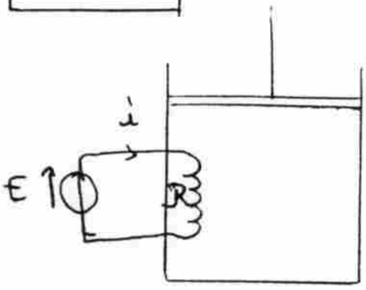
$$\Rightarrow Q = \frac{P_0 S L}{\gamma - 1}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] - \frac{S H_0}{2P_0}\left[P^2 - P_0^2\right].$$

$$Q = \frac{P_0 S L}{\gamma-1}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] + \frac{S H_0 P_0}{2}\left[\frac{P^2}{P_0^2} - 1\right]$$

$$= P_0 S\left[\frac{L}{\gamma-1}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] + \frac{H_0}{2}\left(\frac{P^2}{P_0^2} - 1\right)\right] \qquad \frac{P}{P_0} = 1 + \frac{h}{H_0} = 1{,}192$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = P_0 S\left[\frac{L}{\gamma-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \frac{h}{2H_0}(h + 2H_0)\right] = 71{,}9\ \text{J}} = \boxed{\rho g S\left[\frac{L H_0}{\gamma-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + h\left(H_0 + \frac{h}{2}\right)\right]}$$

TH 207



État initial : P_0, T_0, $V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$.

$$dU = (nC_v + C)\,dT = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev}.$$

$$\delta Q_{rev} = \frac{E^2}{\mathcal{R}}\,dt$$

$$\delta W_{rev} = -P_0\,dV \quad \text{piston sans masse } P = P_0\ \forall t$$

$$\Rightarrow (nC_v + C)\,dT = \frac{E^2}{\mathcal{R}}\,dt - P_0\,dV.$$

$$T = \frac{P_0 V}{nR} \Rightarrow dT = \frac{P_0}{nR}\,dV.$$

d'où $$P_0\left[1 + \frac{nC_v + C}{nR}\right]dV = \frac{E^2}{\mathcal{R}}\,dt$$

d'où encore : $$\boxed{dV = \frac{E^2}{P_0}\,\frac{nR}{nC_p + C}\,\frac{dt}{\mathcal{R}}.}$$

1er cas : $\mathcal{R} = R_0$

alors : $$\boxed{V = V_0 + \frac{E^2}{P_0 R_0}\,\frac{nR}{nC_p + C}\,t}$$

et $$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{S}\,\frac{dV}{dt} = \frac{E^2}{SP_0R_0}\,\frac{nR}{nC_p + C}}$$

2e cas : $$dV = \frac{E^2}{P_0}\,\frac{nR}{nC_p + C}\,\frac{dt}{R_0 + aT} \quad \text{et} \quad T = \frac{P_0 V}{nR}.$$

$$\Rightarrow dV = \frac{E^2}{P_0}\,\frac{nR}{nC_p + C}\,\frac{dt}{R_0 + \frac{aP_0}{nR}V}.$$

$$\Rightarrow \left(R_0 + \frac{aP_0 V}{nR}\right)dV = \frac{E^2}{P_0}\,\frac{nR}{nC_p + C}\,dt.$$

soit : $$\boxed{R_0(V - V_0) + \frac{aP_0}{2nR}(V^2 - V_0^2) = \frac{E^2}{P_0}\,\frac{nR}{C + nC_p}\,t}$$

et $$\boxed{v = \frac{1}{S}\,\frac{dV}{dt} = \frac{E^2}{P_0}\,\frac{(nR)^2}{C + nC_p}\,\frac{1}{nRR_0 + aP_0V}.}$$

Corrigé planche n° 21

TH 301

(1°) $\Delta H = 0 = M C_p (\theta_f - \theta_1) + m L_f + m C_p (\theta_f - \theta_0)$

si on suppose que toute la glace fond : $\theta_f > \theta_0$.

$$\theta_f = \frac{[M\theta_1 + m\theta_0] C_p - m L_f}{(M+m) C_p} < 0.$$

Donc toute la glace ne fond pas : on note $m' < m$ la masse de glace fondue. Alors : $\boxed{\theta_f = \theta_0}$

et $\Delta H = 0 = M C_p (\theta_0 - \theta_1) + m' L_f \Rightarrow m' = 250\,g$.

on aura donc à l'équilibre : $\theta_f = 0°C$
1,250 kg d'eau liquide
250 g de glace.

(2°)

ΔS_1 de la glace : $\Delta S_1 = m' \dfrac{L_f}{T_f} = 307,7\ J.K^{-1}$

ΔS_2 de l'eau liq : $dS_2 = M C_p \dfrac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_2 = M C_p \ln \dfrac{T_f}{T_1} = -296,9\ J.K^{-1}$

$\Rightarrow$ $\Delta S = 10,8\ J.K^{-1} > 0$
$\Delta S = S_{créée}$

Transf. irréversible.

TH 302.

(1°)

État E_0 : $\begin{cases} T_0 = 300K \\ P_0 = 1 atm \\ V_0 = 24,6 L \end{cases}$ $\longrightarrow$ État E_1 : $\begin{cases} T_1 \\ P_1 = P_0 + \dfrac{Mg}{S} = 2,01\ bar \\ V_1 \end{cases}$

Transf. monobare : $\Delta U = Q + W \quad \delta W = -p_1\, dV$

adiabatique ; $Q = 0$.

$\Rightarrow \quad n C_v (T_1 - T_0) = -p_1 (V_1 - V_0)$

$\frac{5}{2} R T_1 - \frac{5}{2} R T_0 = -P_1 V_1 + p_1 V_0. \qquad P_1 V_1 = R T_1.$

$\Rightarrow T_1 = \frac{5}{7} T_0 + P_1 \cdot \frac{2V_0}{7R}.$

avec $P_1 = 2P_0$ cela donne : $\boxed{T_1 = \frac{9}{7} T_0 = 386 K}$ et $\boxed{V_1 = \frac{RT_1}{P_1} = 16{,}0\,L}$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dP \Rightarrow \Delta S_{0\to1} = C_p \ln \frac{T_1}{T_0} - R \ln \frac{P_1}{P_0} = R\left[\frac{7}{2} \ln \frac{386}{300} - \ln 2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S_{0\to1} = 1{,}57\ J.K^{-1}}$$

S échange $= 0$ car parois et piston calorifugés

S créée $= \Delta S_{0\to1} = 1{,}57\ J.K^{-1} > 0$ transf. irréversible.

2°

$$E_1 \begin{cases} P_1 = 2\,bar \\ T_1 = 386\,K \\ V_1 = 16{,}0\,L \end{cases} \longrightarrow E_2 \begin{cases} P_2 \\ V_2 = V_0 \\ T_2 \end{cases}$$

transf. adiab. réversible

$P_2 V_2^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$ $\gamma = 1{,}4$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 1{,}09\ bar.$$

$$\text{et } T_2 = \frac{P_2 V_2}{R} = 324\,K.$$

$$E_2 \begin{cases} P_2 = 1{,}09\,bar \\ V_2 = 24{,}6\,L \\ T_2 = 324\,K. \end{cases} \longrightarrow E_3 \begin{cases} V_3 = V_2 = 24{,}6\,L. \\ T_3 = T_0 = 300\,K. \\ P_3 = \frac{RT_3}{V_3} = 1\,bar = P_0. \end{cases} \equiv E_0.$$

$\Delta S_{1\to2} = 0$ adiabatique réversible.

$\Delta S_{2\to3} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_3}{T_2} = -1{,}60\ J.K^{-1}$

$\Delta S_{1\to3} = \Delta S_{1\to2} + \Delta S_{2\to3} = -1{,}60\,J.K^{-1}$

$2\to3$. $\delta S_{ech} = \frac{C_v\,dT}{T_0} \Rightarrow S_{ech} = \frac{5}{2} R \frac{(T_0 - T_2)}{T_0} = -1{,}66\ J.K^{-1}$

$$\Delta S_{1\to3} = S_{ech} + S_{créée} \Rightarrow \boxed{S_{créée} = 0{,}06\ J.K^{-1}} > 0.$$

évolution irréversible $2\to3$.

3° $2\to3$ réversible. on met en contact avec une infinité de sources de t° allant progressivement de T_2 à T_0 - $\Delta S_{2\to3}$ et $\Delta S_{1\to3}$ ne sont pas modifiées. c'est S_{ech} qui change.