Corrigé planche n° 15.

ON 201

1°

a) $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}$

l'e^- est mis en mouvement parallèlement à $\vec{E}$ donc à $\vec{u}_z$.

* La taille de la molécule et donc l'amplitude du mouvement de l'e^- sont tels que l'on peut considérer que l'e^- se déplace à $x = cte$. Moyennant un changement d'origine des phases de l'onde, on peut se ramener à $x=0$.

* $\boxed{m\ddot{z} + m\omega_0^2 z = -eE_0\, e^{i\omega t}}$ en notation complexe en $x=0$.

* En régime permanent, on cherche $z(t)$ sous la forme :

$z(t) = z_0\, e^{i(\omega t+\varphi)}$. avec z_0 réel.

$m(-\omega^2+\omega_0^2)\, z_0 e^{i(\omega t+\varphi)} = -eE_0\, e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ z_0 = \dfrac{-eE_0}{m}\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z(t) = -\dfrac{eE_0}{m}\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t}$$

b) $$\boxed{\vec{p}(t) = -e\,z(t)\,\vec{u}_z = \frac{e^2E_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t\,\vec{u}_z}.$$

$\vec{p}(t) = p_0\cos\omega t\,\vec{u}_z$ avec $\boxed{p_0 = \dfrac{e^2E_0}{m}\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2}}$

2° $\mathcal{P} = \dfrac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$ puissance rayonnée par le dipôle oscillant

a) avec l'expression de p_0, il vient :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{e^4E_0^2\omega^4}{12\pi m^2\varepsilon_0 c^3(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

Puissance diffusée par un électron libre (non lié à un atome) : correspond à la valeur de $\mathcal{P}$ pour $\omega_0 = 0$ $\quad \mathcal{P}_e = \dfrac{e^4E_0^2}{12\pi m^2\varepsilon_0 c^3}$

Intensité moyenne I_0 de l'OPM incidente : $I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c = \langle |\vec{R}| \rangle$.

alors : $\boxed{\sigma = \frac{\mathcal{P}}{I_0} = \frac{e^4}{6\pi m^2 \varepsilon_0^2 c^4}}$

σ est homogène à une surface. C'est la section efficace de diffusion de l'électron : l'é se comporte comme un petit disque de section σ qui diffuse l'onde incidente.

AN : $\boxed{\sigma = 6{,}63 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{mm}^2}$

Alors : $\boxed{\mathcal{P} = \sigma I_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$

(b) $\omega_0 = 2{,}3 \cdot 10^{16}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 82\ \mathrm{nm}}$. absorption UV lointain

L'UV est le domaine d'absorption des molécules de l'air.

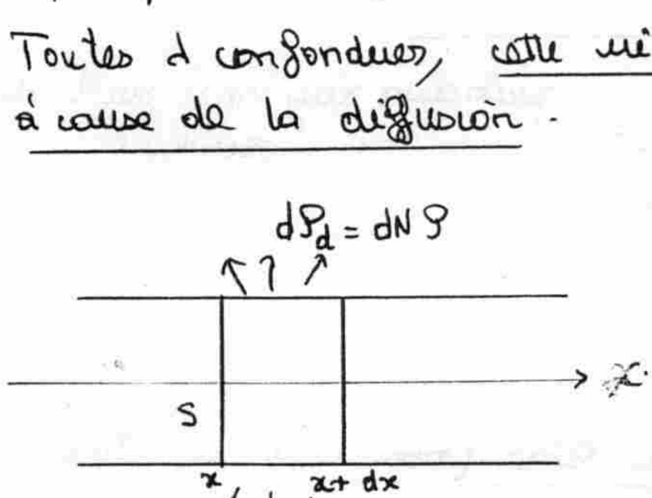
comme, pour le visible, $\lambda \gg \lambda_0$, $\omega \ll \omega_0$ donc : $\boxed{\mathcal{P} \# \sigma I_0 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}$

$\Rightarrow$ puissance diffusée plus importante dans le bleu que dans le rouge.

(3)

(a) L'intensité du faisceau lumineux évolue différemment selon les longueurs d'onde, le long de l'axe de propagation.
Ainsi l'intensité dans les rouges sera plus grande que dans les bleus après traversée d'une forte épaisseur de milieu diffusant puisque le rouge est moins diffusé que le bleu.

Toutes λ confondues, cette intensité diminue lors de la propagation à cause de la diffusion.



$$S\left[I_\lambda(x) - I_\lambda(x+dx)\right] = -\mathcal{P}\,dN$$
$$= -\mathcal{P}\,.\,NS\,dx$$
$$= -\left(\frac{dI_\lambda}{dx}\right) S\,dx$$

or $\rho = \sigma I_\lambda \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$

D'où : $\left(\frac{dI_\lambda}{dx}\right) + \underbrace{\sigma N \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4}_{= \frac{1}{H_\lambda}} I_\lambda(x) = 0$.

$\Rightarrow \quad I_\lambda(x) = A\, e^{-x/H_\lambda}$ en $x=0$ $I = I_0$ donnée

$$\Rightarrow \boxed{I_\lambda(x) = I_0 e^{-x/H_\lambda} \quad \text{avec} \quad H_\lambda = \frac{1}{\sigma N}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^4}$$

(b) AN : $P = \frac{n}{V} RT$ n moles $= \frac{n_m}{\mathcal{N}_A}$ molécules

$\Rightarrow \frac{P}{RT} = \frac{n_m}{V \mathcal{N}_A} = \frac{N}{\mathcal{N}_A}$ D'où $\boxed{N = \mathcal{N}_A \cdot \frac{P}{RT}}$ molécules m^{-3}

à $P = 10^5$ Pa
$T =$ K.

$\boxed{N = 2{,}7 \cdot 10^{25} \text{ molécules} \cdot m^{-3} \text{ dans les CNTP dans un gaz.}}$

Alors : $H_\lambda = 558{,}6 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^4$ (m)

Pour le violet : $\lambda = 400$ nm $\Rightarrow H_v = 316$ km.

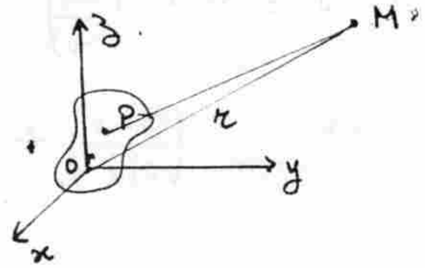
Pour le rouge : $\lambda = 750$ nm $\Rightarrow H_r = 3910$ km.

(c) Pour le ciel en plein jour, la lumière solaire a traversé une épaisseur de l'ordre de 200 km (atmosphère), distance sur laquelle le bleu est très diffusé $\Rightarrow$ le ciel paraît bleu. (s'il n'y avait pas diffusion, il paraîtrait noir).

Au coucher de soleil, la lumière solaire a traversé une épaisseur plus grande ($\sim$ 1000 km), le bleu est totalement éteint et seuls les rayons rouges arrivent jusqu'à l'observateur : le ciel et le soleil paraissent rouges.

ON 202.

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} \, d\tau_P .$$



Loin des charges : $PM \# OM = r$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_V \vec{j}\left(P, t - \frac{r}{c}\right) d\tau_P}$$

1°) Ici $\vec{j}\, d\tau = q\vec{v}$ et $\boxed{\vec{A}(M,t) \# \frac{\mu_0}{4\pi r} q\, \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right)}$.

2°) $\vec{rot}\, \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \,?$ on pose $t' = t - \frac{r}{c}$ variable math. unique

<u>Composantes sur (xyz) de ces vecteurs</u> : $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$.

$$\vec{rot}\, \vec{v}(t') = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \dot{v}_z(t') \times \frac{\partial t'}{\partial y} = -\frac{1}{c} \dot{v}_z(t') \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) \quad \text{avec } r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{1}{rc}\, y\, \dot{v}_z(t').$$

D'où $$\vec{rot}\, \vec{v}(t') = -\frac{1}{rc} \begin{vmatrix} y\dot{v}_z - z\dot{v}_y \\ x\dot{v}_z - z\dot{v}_x \\ x\dot{v}_y - y\dot{v}_x \end{vmatrix} = -\frac{1}{rc} \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}}(t')$$

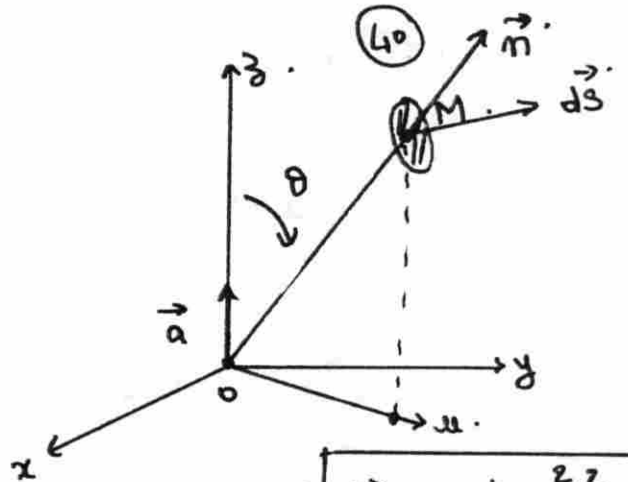
en posant $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$: $\boxed{\vec{rot}\, \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \dot{\vec{v}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}$.

Or $$\vec{B} = \vec{rot}\, \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \vec{rot}\left[\frac{\vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right] = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[\vec{grad}\, \frac{1}{r} \wedge \vec{v} + \frac{1}{r} \vec{rot}\, \vec{v}\right]$$

on a donc la relation : $\vec{E} = c\, \vec{n} \wedge \vec{B}$

ou encore : $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}$.

on a affaire à une onde <u>localement plane transversale</u>



on se place en coordonnées sphérique

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{-\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} (\vec{n} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{V}$$

avec $\vec{V} = \vec{a} \wedge \vec{n}$

$$= \frac{+\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} \vec{V}^2 \vec{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R} = \frac{\mu_0 a^2 q^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2\theta \; \vec{n}}$$

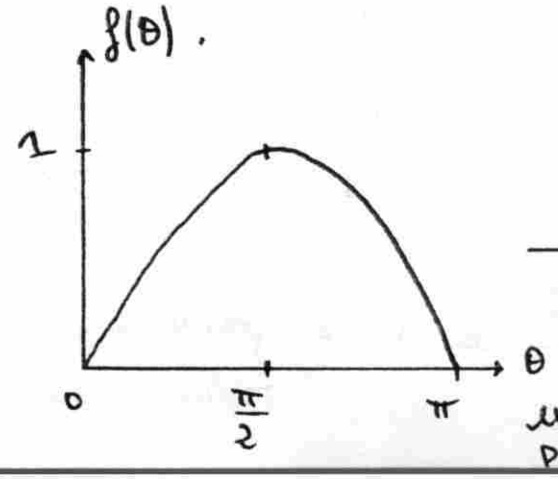
$$\boxed{dP = \vec{R} \cdot \vec{dS} = \frac{\mu_0 a^2(t - r/c) q^2}{16\pi^2 c} \frac{\vec{n} \cdot \vec{dS}}{r^2} \sin^2\theta}$$

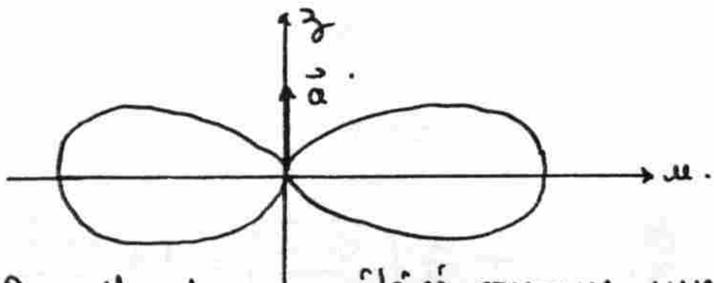
or on s'aperçoit que $dP = \frac{\mu_0 a^2(t - r/c)}{16\pi^2 c} \sin^2\theta \, d\Omega$.

$d\Omega$: angle solide sous lequel de O, on voit $\vec{dS}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 a^2(t - r/c) q^2}{16\pi^2 c} \sin^2\theta}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 a^2(t - r/c) q^2}{16\pi^2 c} \Rightarrow \boxed{\frac{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)(\theta)}{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sin^2\theta} = f(\theta).$$





Une charge accélérée rayonne une puissance max. ds un plan ⊥ son accélération et une puissance nulle

- $\overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{1}{r} = -\frac{\vec{n}}{r^2}$ correspond à un terme d'ordre 2 en $\frac{1}{r}$.
  → négligé pour $r \gg d$ et $r \gg$ amplitude du mvt de q.

- d'où au 1^{er} ordre en $\frac{1}{r}$: $\vec{B}(M,t) \# \frac{\mu_0 q}{4\pi r c}\, \dot{\vec{v}}(t-\frac{r}{c}) \wedge \vec{n}$

soit : $\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r c}\, \vec{a} \wedge \vec{n}}$ avec $\vec{a}(t-\frac{r}{c}) = \dot{\vec{v}}(t-\frac{r}{c})$.

(3°) (MA) dans le vide : $\vec{j} = \vec{0}$ en M.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi c} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{n}}{r} \right) = \frac{\mu_0 q}{4\pi c} \Big[\underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r}\right) \wedge (\vec{a} \wedge \vec{n})}_{2^e \text{ ordre en } \frac{1}{r}} + \frac{1}{r} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{a} \wedge \vec{n}) \Big]$$

on pose $\vec{V} = \vec{a} \wedge \vec{n}$: $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{n}) = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \dot{\vec{V}} = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \dot{\overline{[\vec{a} \wedge \vec{n}]}}$

D'où = $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q c}{4\pi r c} \vec{n} \wedge \dot{\overline{[\vec{a} \wedge \vec{n}]}}$

De plus, la dérivation par rapport à t et à t' est la même et $\vec{n}$ ne dépend pas de t d'où, en intégrant par rapport à t (ou t') :

$\boxed{\vec{E}(M,t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a}(t-\frac{r}{c}))}$ au 1^{er} ordre en $\frac{1}{r}$

<u>Hypothèse particule non relativiste</u> ⇒ **dérivex / à t ≡ dérivex / à t'**

$t' = t - \frac{PM}{c}$ avec $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$

⇒ $\|\overrightarrow{PM}\|^2 = r^2 + PO^2 + 2\, \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}$

⇒ $\|\overrightarrow{PM}\| \# r + \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{r}$ au 1^{er} ordre en OP.

⇒ $t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}}{c}$

⇒ $\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}}{c}\right) = 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c} \# 1$ si particule non relativiste

(5°)

<u>Puissance totale rayonnée</u> : $\mathcal{P}(r,t) = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 a^2 q^2}{16\pi^2 c} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{r^2} \sin^2\theta}_{= \frac{4}{3} \times 2\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(r,t) = \frac{2}{3}\frac{\mu_0 q^2}{4\pi c}\, a^2\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2(t-r/c)}{c^3}}$$

$\boxed{\text{ON 203}}$

(1°) <u>Pfd à l'e⁻ sur son orbite circulaire</u> :

$$m\frac{v_0^2}{r_0} = e\cdot\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 m}}}$$

<u>$v_0 = 2{,}18\cdot 10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$</u>

<u>accélération</u> : $\boxed{a_0 = \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^2}}$ <u>$a_0 = 9{,}01\cdot 10^{22}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$</u>

$\alpha = \frac{v_0}{c} = \frac{1}{137}$ appelée constante de structure fine.

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}}$$

<u>$E_0 = -2{,}17\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -13{,}6\ \mathrm{eV}$.</u>

$\alpha \ll 1$ donc électron non relativiste.

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi}{e}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m}\ r_0^{3/2}}$$

<u>$T_0 = 4{,}53\cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}$.</u>

(2°) L'état de polarisation dépend de $\vec{a}$ donc de la position de l'e⁻ sur son orbite

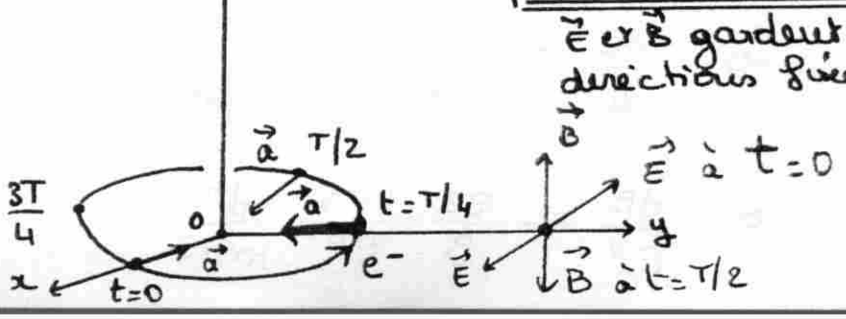
<u>Dans le plan de l'orbite</u> :

$\vec{a}$ est centripète

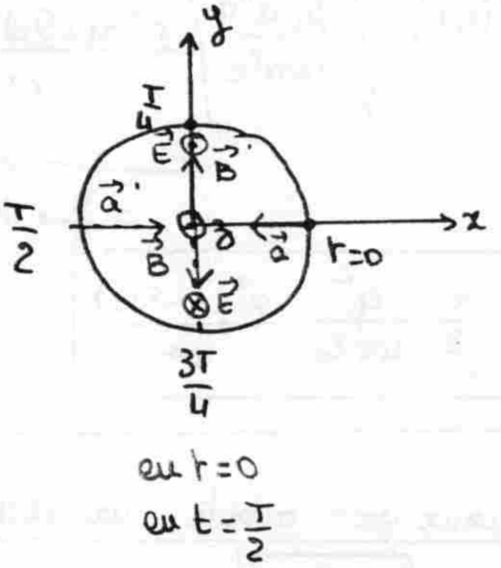
$\vec{E}$ et $\vec{B} = \vec{0}$ en $t = \frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$

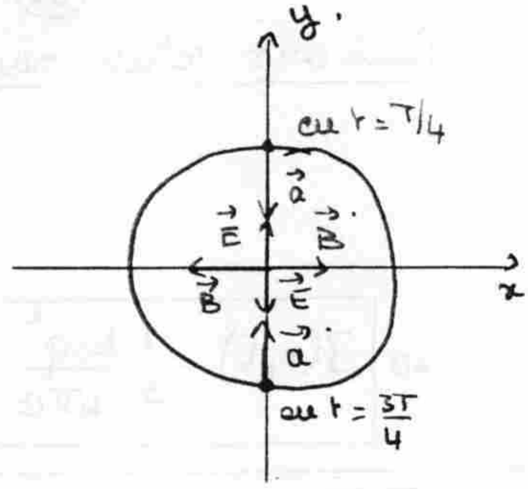
<u>polarisation rectiligne</u>

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ gardent des directions fixes



Sur l'axe de l'orbite : vue de dessus.





$\vec{E}$ et $\vec{B}$ gardent une norme cte sur l'axe Oz mais tournent dans un plan d'onde $\Rightarrow$ polarisation circulaire

---

(3°) $\mathcal{P} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a_0^2}{c^3} = \underline{4,6.10^{-8}\ W}$

Si on considère $\mathcal{P}$ comme constante au début, il perd une énergie $\underline{|\Delta E| = \mathcal{P}.T_0 = 7.10^{-24}\ J = 4,4.10^{-5}\ eV}$.

$$\frac{|\Delta E|}{E_0} = 3,25.10^{-6}$$

comme E_0 est directement relié à r_0, celui-ci ne peut rester constant puisque E_0 diminue.

$$E = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \qquad \left|\frac{\Delta E}{E_0}\right| = +\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right| = \underline{3,25.10^{-6}}\ \text{très très faible}$$

(4°) $\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a_0^2}{c^3}$

avec $a_0^2 = \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 r_0^2} = \left(\frac{16\pi\varepsilon_0 E^2}{me^2}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{32}{3}\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{E^4}{m^2c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{E^4} = -\frac{32}{3}\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{dt}{m^2c^3}$$

on intègre entre 0 et t :

$$-\frac{1}{E^3}+\frac{1}{E_0^3}=-\frac{32}{3}\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{t}{m^2c^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{E(t)^3}=\frac{1}{E_0^3}+32\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{t}{m^2c^3}}$$

Comme $E(t)=-\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r(t)}$ il vient :

$$\boxed{r(t)^3=r_0^3-4\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{m^2c^3}t}$$

5°) $r(t)$ s'annule au bout d'un temps fini :

$$\boxed{\tau=r_0^3\frac{m^2c^3}{4}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2}$$

$\underline{\tau=1{,}56.10^{-11}\text{ s}.}$ $\gg T_0$.

$\dfrac{\tau}{T_0}\simeq 10^5$. au bout de 100000 tours.

Si r s'annule, $E\to\infty$!

D'où les contradictions de la mécanique classique !

6°) $\sigma_n=n\hbar$ $\quad \hbar=\dfrac{h}{2\pi}=1{,}055.10^{-34}$ J.s.

$$\sigma=mrv\Rightarrow \sigma^2=(mrv)^2=\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0}r=n^2\hbar^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r_n=n^2\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{\hbar^2}{m}}$$

et, avec $E=-\dfrac{1}{2}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$: $\boxed{E_n=-\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\dfrac{m}{2\hbar^2}}$

<u>AN:</u> $E_1=-13{,}6$ eV $\quad$ on retrouve les résultats du début

$r_1=0{,}53.10^{-10}$ m

7°) $j>i$

$$\frac{1}{E_j^3}-\frac{1}{E_i^3}=32\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{\tau_{ij}}{m^2c^3}=\left(\frac{2\hbar^2}{m}\right)^3\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^6(j^6-i^6)$$

D'où $\boxed{\tau_{ij} = \frac{\hbar^6 c^3}{4m} \left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^5 (j^6 - i^6) = \tau \cdot (j^6 - i^6)}$.

<u>AN</u>: $\tau_{12} = 1{,}0 \; 10^{-9}$ s $\leftrightarrow$ $\tau_c = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ s.

$\tau_{56} = 4{,}9 \cdot 10^{-7}$ s $\leftrightarrow$ $\tau'_c = 6{,}1 \cdot 10^{-7}$ s.

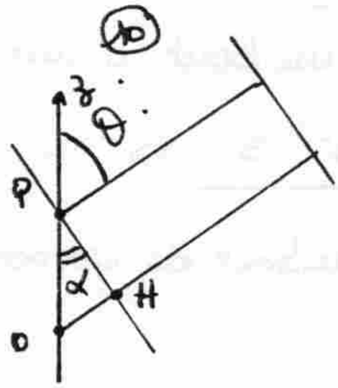
Valeurs à peu près concordantes.

ON 204

dipôle élémentaire $d\vec{p}$ selon Oz rayonne :

$$\vec{dE}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{d\ddot{p}(t - r/c) \sin\theta}{r} \vec{u}_\theta$$

(a)



. M à ∞ infini

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

- L'onde issue de P et celle issue de O sont déphasées de $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$ avec $\delta = OH = z \sin\alpha = z \cos\theta$.

- <u>autre vision des choses</u> : dans $d\vec{E}$ $r = PH \# OH$.

mais il faut évaluer $d\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$

$$t - \frac{r}{c} = t - \frac{PH}{c} \# t - \frac{OH}{c} + \underbrace{\frac{z\cos\theta}{c}}$$

ne peut être négligé si $d\ddot{p}$ varie très vite avec t.

(b) $\vec{dE}_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} d\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z\cos\theta}{c}\right) \sin\theta \, \vec{u}_\theta$ où $r = OH$.

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\sin\theta \, \vec{u}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \int_{-\ell}^{\ell} d\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z\cos\theta}{c}\right)$$

$dp = q dz$ dipôle élémentaire centré en P.

$$d\dot{p} = \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)}_{=I} dz \qquad d\ddot{p} = \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) dz = -I_0 \omega f(z) \sin \omega t.$$

D'où ; $$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{-\sin\theta\, \vec{u}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 r c^2} I_0\omega \int_{-l}^{l} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z\cos\theta}{c}\right) f(z)\, dz.$$

$$= -\frac{\sin\theta\, \vec{u}_\theta I_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}\int_{-l}^{l}\left[\sin(\omega t - kr)\cos(kz\cos\theta) + \cos(\omega t - kr)\sin(kz\cos\theta)\right] f(z)\, dz.$$

Si $f(z) = f(-z)$ est une fonction paire, le terme en
$$\int_{-l}^{l}\cos(\omega t - kr)\sin(kz\cos\theta) f(z)\, dz = 0.$$

Donc : $$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{u}_\theta \frac{\sin\theta\, I_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}\left[2\int_0^l \cos(kz\cos\theta) f(z)\, dz\right]\cdot \sin(\omega t - kr)}$$

(2°) $f(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right)$

(a) $$\int_{-l}^{l}\cos(kz\cos\theta)\cos\frac{\pi z}{2l}\, dz \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

si $l \ll \lambda$: $\cos(kz\cos\theta) = \cos\left(\frac{2\pi z\cos\theta}{\lambda}\right) \# 1.$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l}\cos(kz\cos\theta)\cos\frac{\pi z}{2l}\, dz \# \frac{4l}{\pi}$$

D'où $$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{I_0\omega\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}\left(\frac{4l}{\pi}\right)\sin(\omega t - kr)\, \vec{u}_\theta.}$$

Pour un champ $\vec{E}$ de la forme : $\vec{E} = \frac{-p_0\omega^2 \sin(\omega t - kr)}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}\sin\theta\, \vec{u}_\theta$

la puissance rayonnée moyenne est :
$$\mathcal{P} = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

En transposant ici, en remplaçant $p_0\omega^2$ par $I_0\omega\left(\frac{4l}{\pi}\right)$

avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, on a : $P_0\omega^2 \leftrightarrow 8I_0 c \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)$.

ce qui donne pour $\mathcal{P}$: $\mathcal{P} = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot (8I_0)^2 c^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = \frac{16 I_0^2}{3\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2} R I_0^2$$

D'où $\boxed{R = \frac{32}{3}\frac{1}{\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 1280\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \text{ en } \Omega.}$

<u>résistance de rayonnement</u>

(b) $\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{4}$ <u>antenne demi-onde</u> $\cos(kz\cos\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2\ell}z\cos\theta\right)$

$$\int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi}{2\ell}z\cos\theta\right)\cos\frac{\pi z}{2\ell}\,dz =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell \left[\cos\left(\frac{\pi}{2\ell}z(1+\cos\theta)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2\ell}z(1-\cos\theta)\right)\right]dz$$

$$= \frac{\ell}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)}{1-\cos\theta}\right] = \frac{2\ell}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\simeq 0{,}95 \cdot \frac{2\ell}{\pi}$$

D'où $\boxed{\vec{E} = -\frac{I_0\omega\left(\frac{4\ell}{\pi}\times 0{,}95\right)\sin\theta}{4\pi\varepsilon r c^2}\sin(\omega t - kr)\,\vec{u}_\theta}$

L'expression ci-dessus se déduit formellement de celle du (a) en remplaçant ℓ par $0{,}95\,\ell$.

$\Rightarrow \boxed{R = \frac{32}{3}\frac{1}{\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{0{,}95\ell}{\lambda}\right)^2}$ avec $\ell = \frac{\lambda}{4}$ on a $\boxed{R = 72\,\Omega}$

(c) Pour $\ell = \frac{\lambda}{40}$: <u>$R = 0{,}8\,\Omega$.</u>

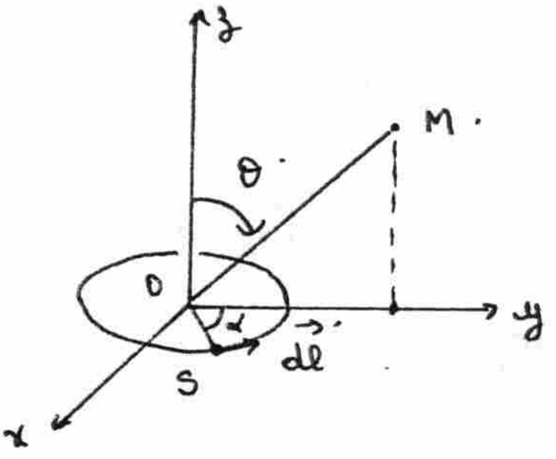
Plus R est grand, plus la puissance rayonnée est importante. Les petites antennes rayonnent mal.

Pour $\ell = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 0{,}75$ m : $P = \frac{1}{2} R I_0^2 = 3{,}6$ kW

Amplitude maximale de E : $E_0 = 1{,}2.10^{-3}$ V.m^{-1}

$\boxed{\text{ON 205}}$

(10) $$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{I\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \, \vec{d\ell}$$



M étant fixé, on peut le prendre dans le plan $\varphi = 0$ par ex. dans le plan (yOz)

$$\vec{OS} = a \begin{vmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{OM} \begin{vmatrix} 0 \\ r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$R = SM = \|\vec{SO} + \vec{OM}\| = \left[a^2 + r^2 + 2\,\vec{SO}\cdot\vec{OM}\right]^{1/2}$$

$$= r\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\alpha\sin\theta\right]^{1/2}$$

$$R \simeq r\left[1 - \frac{a}{r}\cos\alpha\sin\theta\right] \qquad \vec{d\ell} = a\,d\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0. \end{vmatrix}$$

$$R \simeq r - a\cos\alpha\sin\theta$$

$$\frac{I\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{I_0\, e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R} = \frac{I_0\, e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\, e^{-i\frac{\omega a}{c}\cos\alpha\sin\theta}}{r\left(1 - \frac{a}{r}\cos\alpha\sin\theta\right)}.$$

comme $a \ll \lambda$: $\frac{\omega a}{c} \ll 1$ d'où :

$$\frac{I\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R} \simeq \frac{I_0\, e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r} \; \frac{1 - i\frac{\omega a}{c}\cos\alpha\sin\theta}{1 - \frac{a}{r}\cos\alpha\sin\theta}$$

d'où $$\vec{A} = \frac{\mu_0 a I_0\, e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\pi r} \begin{vmatrix} \int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \left(-i\frac{\omega a}{c} + \frac{a}{r}\right)\cos\alpha\sin\theta\right)\cos\alpha\, d\alpha \\ \int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \left(-i\frac{\omega a}{c} + \frac{a}{r}\right)\cos\alpha\sin\theta\right)\sin\alpha\, d\alpha = 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{a\mu_0 I_0 e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{4\pi r}\left[\frac{a}{r} - i\frac{\omega a}{c}\right]\sin\theta \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\alpha\, d\alpha}_{=\pi} \cdot \vec{u}_x$$

ici on transforme $\vec{u}_x$ en $\vec{u}_\varphi$, $k = \frac{\omega}{c}$

et $$\boxed{\vec{A} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I_0 e^{-i\omega t}\, e^{ikr}}{4\pi r^2}(1 - ikr)\sin\theta\, \vec{u}_\varphi}$$

de la forme $\vec{A} = \alpha \sin\theta\, \frac{1+f(kr)}{r^2}\, e^{ikr}\, \vec{u}_\varphi$

avec $\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathcal{M}$ et $f(kr) = -ikr$

---

(20)

* $kr \ll 1$: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^2}\vec{u}_\varphi$ potentiel-vecteur du dipôle magnétostatique

* $kr \gg 1$: zone de rayonnement

---

(30) $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\,\vec{A}$

Avec le rotationnel en coordonnées sphériques : on obtient un B_r en $\frac{1}{r^2}$ négligé et un B_θ :

$$B_\theta = -\frac{ik\alpha}{r\sin\theta}\cdot\frac{d}{dr}\left(\sin^2\theta\, e^{ikr}\right) = \frac{k^2\alpha\sin\theta}{r}e^{ikr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\alpha k^2 \sin\theta}{r}e^{ikr}\,\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E} = -i\frac{k}{c}\vec{E} = -\frac{1}{r}\alpha k^2\sin\theta\frac{d}{dr}\left(e^{ikr}\right)\vec{u}_\varphi .$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\alpha k^2 c\sin\theta}{r}e^{ikr}\,\vec{u}_\varphi}$$

$\boxed{\dfrac{E}{B} = c}$ et on a $\boxed{\vec{B} = \dfrac{1}{c}\,\vec{u}_r \wedge \vec{E}}$ structure locale d'onde plane comme pour le rayonnement dipolaire électrique

---

(40) $\vec{R} = \dfrac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \wedge \vec{B}$.

$$\vec{E} = \frac{\pi a^2 I_0 \mu_0 c}{4\pi}\,\frac{k^2 \sin\theta}{r}\,\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B} = -\frac{\pi a^2 I_0 \mu_0}{4\pi}\,\frac{k^2 \sin\theta}{r}\,\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_\theta.$$

$$\vec{R} = \left(\frac{\pi a^2 I_0 \mu_0}{4\pi}\right)^2 c\,\frac{k^4 \sin^2\theta}{\mu_0 r^2}\,\cos^2(\omega t - kr)\,\vec{u}_r$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \left(\frac{\pi a^2 \mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{I_0^2 \omega^4}{2c^3 \mu_0}\,\frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\vec{u}_r.$$

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \langle \vec{R} \rangle \sin\theta\, r^2\, d\theta\, d\varphi \cdot \vec{u}_r$$

$$= \left(\frac{\pi a^2 \mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{I_0^2 \omega^4}{2c^3 \mu_0}\, 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{=4/3.}$$

$$\Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 \pi}{12\, c^3}\, a^4 \omega^4 \qquad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle P \rangle = \frac{8}{3}\,\mu_0 \pi^5 c \cdot \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \frac{I_0^2}{2} = R_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n \frac{I_0^2}{2} \quad \text{où} \quad R_0 = \frac{8}{3}\,\mu_0 \pi^5 c \quad n = 4}$$

$\boxed{R_0 = 307{,}6\ \mathrm{k\Omega}}$ résistance de rayonnement

c'est la résistance qui, traversée par un courant d'intensité efficace $\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$, dissiperait une puissance égale à $\langle P \rangle$.