

ON a: onde cylindrique

$$\vec{E} = E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z \quad E(r) \text{ réel}$$

a) (MF):  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{rot}} [E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z] = \vec{\text{grad}} (E(r) e^{i(\omega t - kr)}) \wedge \vec{u}_z$$

$$= \frac{d}{dr} [E(r) e^{i(\omega t - kr)}] \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z$$

$$= -\left[ iE(r)k + \frac{dE}{dr} \right] e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta = -i\omega \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\left[ \frac{k}{\omega} E(r) + \frac{i}{\omega} \frac{dE}{dr} \right] e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

composé de 2 termes:  $-\frac{k}{\omega} E(r) \cos(\omega t - kr)$  en phase avec  $\vec{E}$

$+\frac{1}{\omega} \left( \frac{dE}{dr} \right) \sin(\omega t - kr)$  en quadrature avancée sur  $\vec{E}$

$\vec{B}$  est transverse ( $\perp \vec{u}_r$ ) et polarisé rectilignement.

b)  $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right] = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[ E(r) \vec{u}_z \wedge \frac{kE(r) + i dE/dr}{\omega} \vec{u}_\theta \right]$

$$= +\frac{1}{2\mu_0} \vec{u}_r \text{Re} \left[ \frac{k}{\omega} E(r)^2 + \frac{i}{\omega} E(r) \left( \frac{dE}{dr} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E(r)^2 \vec{u}_r \quad \text{vecteur radial divergent // direction de propagation.}$$

$$P = 2\pi r h \frac{1}{2} \epsilon_0 c E(r)^2$$

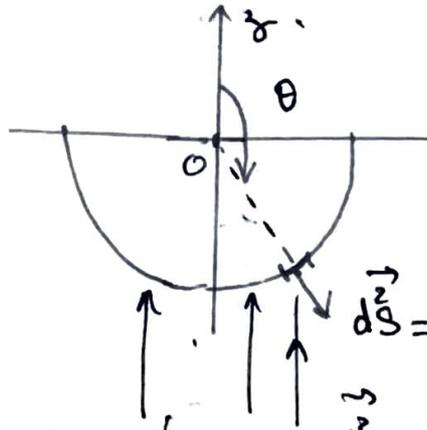
c) Puisqu'il n'y a ni absorption, ni création d'énergie lors de la propagation de cette onde dans le vide, P ne doit pas varier avec  $r$  et  $P_h$  est une constante.

$$\Rightarrow r E(r)^2 = \text{cte sur } P_h = \pi r \epsilon_0 c E(r)^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \sqrt{\frac{P_h}{\pi \epsilon_0 c}} \frac{1}{\sqrt{r}}$$

## Exercice 2 - Levitation par faisceau laser

①



$$d\vec{S} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u}_r$$

- force exercée sur  $d\vec{S}$  = force de pression de radiation  

$$d\vec{F} = -P_r d\vec{S} = -\frac{2I}{c} \cos^2 i \, d\vec{S} \quad \text{avec } i = \pi - \theta$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = -\frac{2I}{c} \cdot R^2 \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u}_r$$

- force résultante sur la  $\frac{1}{2}$  sphère éclairée :

$$\vec{F}_p = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\vec{F} \quad \text{par symétrie, elle est portée par } Oz$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\vec{F} \cdot \vec{u}_z = + \frac{2I}{c} R^2 \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot \underbrace{\cos\theta}_{-\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z} \, d\theta \\ &= \frac{2I}{c} R^2 \cdot 2\pi \left[ -\frac{1}{4} \cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{I}{c} \pi R^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_p = \frac{I}{c} \pi R^2 \vec{u}_z}$$

- ② Pour soulever la bille il faut  $F_p - mg > 0$ .

$$\Rightarrow \boxed{I > I_m = \frac{mgc}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \rho g c R}$$

la puissance arrivant sur la bille = 
$$\boxed{P_m = \pi R^2 I_m = mgc}$$

AN:  $R = 10^{-4} \text{ m}$   
 $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = 11,3 \text{ } \mu\text{g} = 11,3 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$   
 $I_m = 1,06 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $P_m = 33 \text{ W}$ .

③ 1<sup>er</sup> principe appliqué à la bille par unité de temps:

$$mC \frac{dT}{dt} = -AS(T(t) - T_a) + \alpha P_m \quad \text{où } S = 4\pi R^2$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} (T(t) - T_a) = \frac{\alpha P_m}{mC} = \frac{dgc}{C}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{mC}{AS} = \frac{\frac{4}{3}\rho CR}{AS} = \frac{4 \times 2,7 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}{3 \times 150}$$

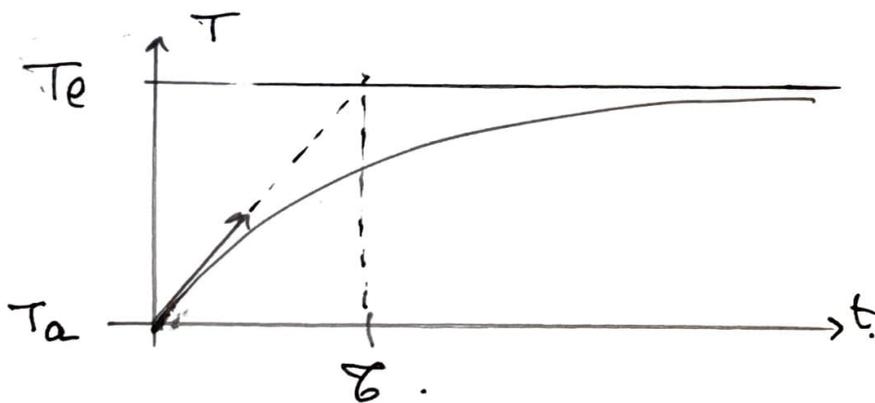
$$\tau = 2,2 \text{ s.}$$

la température maximale atteinte est la température à  $t \rightarrow \infty$ . En effet:

$$T(t) - T_a = \frac{\alpha P_m}{AS} + A e^{-t/\tau}$$

$$\text{à } t=0: T = T_a \Rightarrow A = - \frac{\alpha P_m}{AS}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_a + \frac{\alpha P_m}{AS} (1 - e^{-t/\tau})$$



$$\frac{\alpha P_m}{AS} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 33}{150 \cdot 4\pi \cdot 10^{-8}} = 875 \text{ K.}$$

$\Rightarrow T_e = 1175 \text{ K} > T_{\text{fusion}} \rightarrow$  il y a fusion.

Il est très compliqué de faire léviter un objet par pression de radiation!

$\rightarrow$  mieux vaut la lévitation magnétique

10) Vitesse de propagation  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

20)  $\vec{k}_1 = k \cos \alpha \vec{u}_x + k \sin \alpha \vec{u}_y$

$$\vec{E}_1(M, t) = E_0 \exp i(k \cos \alpha x + k \sin \alpha y - \omega t) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_1(M, t) = E_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{u}_z$$

30)  $\vec{B}_1(M, t) = \frac{\mu_0}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}_1$  avec  $\vec{n} = \frac{\vec{k}_1}{k}$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & E_0/c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sin \alpha}{c} E_0 \\ -\frac{\cos \alpha}{c} E_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1(M, t) = \frac{E_0}{c} [\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y] \exp i(k \cos \alpha x + k \sin \alpha y - \omega t)$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont  $\perp$  et  $\perp$  à  $\vec{n}$  et sont donc transverses.

$$Z_c = \frac{\mu_0 \|E\|}{\|B\|} \quad \text{à} \quad \|B\| = \frac{\|E\|}{c} \quad \text{puisque} \quad \vec{E}_1 \perp \vec{n}_1$$

$$\Rightarrow Z_c = \mu_0 c \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\Rightarrow Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \underline{\underline{377 \Omega}}$$

40)  $\frac{dW}{dS}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)$

$$\langle \frac{dW}{dS} \rangle = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

50)  $\vec{R}_1(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1 = \epsilon_0 c E^2 \vec{n}$

soit:  $\vec{R}_1(M, t) = \epsilon_0 c E_0^2 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} [\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y]$

$$\|\vec{R}\| = \epsilon_0 c \epsilon_0^{-1} \omega^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

(2)

$$\langle \|\vec{R}\| \rangle = \frac{\epsilon_0 c \epsilon_0^{-1} \omega^2}{2} \Rightarrow \langle \|\vec{R}\| \rangle = c \langle \frac{dW}{d\Omega} \rangle$$

(60) AN:  $\omega$  transportée à travers (S) =  $1 \text{ m}^2 \perp \vec{a}$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = S \langle \|\vec{R}\| \rangle \Rightarrow \langle \|\vec{R}\| \rangle = 0,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\Rightarrow \langle \frac{dW}{d\Omega} \rangle = 6,67 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\Rightarrow E_0 = \left( \frac{2}{\epsilon_0 c} \langle \|\vec{R}\| \rangle \right)^{1/2} \rightarrow E_0 = 12,3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\Rightarrow B_0 = E_0/c \rightarrow B_0 = 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

II Superposition de 2 ondes de directions différentes

(70)

$$\begin{cases} \vec{R}_2 = R_0 (\cos a \vec{u}_x - \sin a \vec{u}_y) \\ \vec{E}_2 = E_0 e^{i(k\omega a x - k\omega a y - \omega t)} \vec{u}_z \\ \vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} [\sin a \vec{u}_x + \cos a \vec{u}_y] e^{i(k\omega a x - k\omega a y - \omega t)} \end{cases}$$

(80)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 e^{-i\omega t} e^{ik\omega a x} (e^{ik\omega a y} + e^{-ik\omega a y}) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M,t) = 2E_0 \cos(k\omega a y) e^{i(k\omega a x - \omega t)} \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i(k\omega a x - \omega t)} [\sin a (e^{ik\omega a x} - e^{-ik\omega a x}) \vec{u}_x + \cos a (e^{ik\omega a x} + e^{-ik\omega a x}) \vec{u}_y]$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M,t) = \frac{2E_0}{c} [i \sin a \sin(k\omega a y) \vec{u}_x - \cos a \cos(k\omega a y) \vec{u}_y] e^{i(\dots)}$$

a) plans d'onde: plans  $x = ct$  ( $\perp$  à  $Ox$ )  
 dans un plan d'onde  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne sont pas uniformes.

b) direction de propagation de la phase:  $Ox$  vers les  $x > 0$ .  
vitesse de propagation de la phase:  $\frac{\omega}{k \cos a} = \frac{c}{\cos a} > c$ .

c) Structure des champs:

$$B_x = \frac{2\epsilon_0}{c} \sin a \sin(k_0 \sin a y) e^{i(k_0 \cos a x - \omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$B_y = -\frac{2\epsilon_0}{c} \cos a \cos(k_0 \sin a y) e^{i(k_0 \cos a x - \omega t)}$$

$\vec{E}$  est  $\perp$  à la direction de propagation mais  $\vec{B}$  possède une composante selon la direction de propagation ( $ox$ ), (composante longitudinale), décalée de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à  $\vec{E}$ .

d) Dans une onde plane:  $x = ct$   
 Les champs ne dépendent que de  $y$ , pas de  $z$ .  
 Ils sont fct's périodiques de  $y$ :

$$\begin{cases} B \text{ est en } \sin \text{ ou } \cos(k_0 \sin a y) \\ E \text{ est en } \cos(k_0 \sin a y) \end{cases}$$

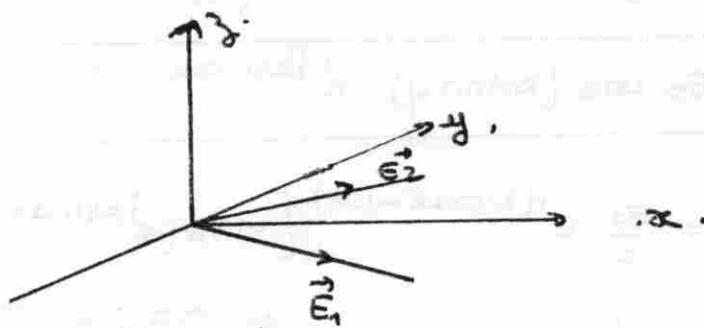
période  $b = \frac{2\pi}{k_0 \sin a}$

comme  $\frac{2\pi}{k} = \lambda$

$$b = \frac{\lambda}{\sin a}$$

notation :  $x_i = z$   
 $x_j = y$

(9)



Une onde plane semi-réfléchissante //  $xOz$ .

(10)

$$\frac{dW}{dS} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad E \text{ et } B \text{ grandeurs réelles}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dS} = 2\epsilon_0^2 \cos^2(k \sin a y) \cos^2(k \cos a x - \omega t) + \frac{2}{\mu_0} \left[ \frac{\epsilon_0^2}{c^2} \sin^2 a \sin^2(k \sin a y) \sin^2(k \cos a x - \omega t) + \frac{\epsilon_0^2}{c^2} \cos^2 a \cos^2(k \sin a y) \cos^2(k \cos a x - \omega t) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = 2\epsilon_0 E_0^2 \left[ \cos^2(k \cos a x - \omega t) \cos^2(k \sin a y) (1 + \cos^2 a) + \sin^2(k \cos a x - \omega t) \sin^2(k \sin a y) \sin^2 a \right]$$

$$\left\langle \frac{dw}{dz} \right\rangle (M) = \epsilon_0 E_0^2 \left[ (1 + \cos^2 \alpha) \cos^2(ky \sin \alpha) + \sin^2 \alpha \sin^2(ky \sin \alpha) \right] \quad (3)$$

$\left\langle \frac{dw}{dx} \right\rangle = \left\langle \frac{dw}{dz} \right\rangle$   $x$  variable de la direction de propagation  
 La densité moyenne d'énergie électromagnétique

$$\left\langle \frac{dw}{dx} \right\rangle = \int_0^b dy \int_0^d dz \epsilon_0 E_0^2 \left[ (1 + \cos^2 \alpha) \cos^2(ky \sin \alpha) + \sin^2 \alpha \sin^2(ky \sin \alpha) \right]$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 d \left[ (1 + \cos^2 \alpha) \left[ \frac{b}{2} \right] + \sin^2 \alpha \frac{b}{2} \right] \Rightarrow \boxed{\left\langle \frac{dw}{dx} \right\rangle = \epsilon_0 E_0^2 d b}$$

$$(110) \quad \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & 0 & E_z \\ E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x & 0 & 0 \\ B_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} -E_z B_y & 0 & 0 \\ E_z B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} R_x = \frac{1}{\mu_0} \cdot 2E_0 \cos(ky \sin \alpha) \cos(kx \cos \alpha - \omega t) \cdot \frac{2E_0}{c} \cos \alpha \cos(ky \sin \alpha) \cos(kx \cos \alpha - \omega t) \\ R_y = \frac{1}{\mu_0} 2E_0 \cos(ky \sin \alpha) \cos(kx \cos \alpha - \omega t) \cdot \frac{2E_0}{c} \sin \alpha \sin(ky \sin \alpha) \sin(kx \cos \alpha - \omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = 4\epsilon_0 E_0^2 \cos \alpha \cos^2(ky \sin \alpha) \cos^2(kx \cos \alpha - \omega t) \\ R_y = 4\epsilon_0 E_0^2 \sin \alpha \left[ \frac{1}{2} \sin(2ky \sin \alpha) \right] \sin(kx \cos \alpha - \omega t) \cos(kx \cos \alpha - \omega t) \end{cases}$$

$$\langle R_y \rangle = 0$$

$$\langle R_x \rangle = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos \alpha \cos^2(ky \sin \alpha) \neq 0$$

l'énergie se propage selon  $x$  (direction de propagation).

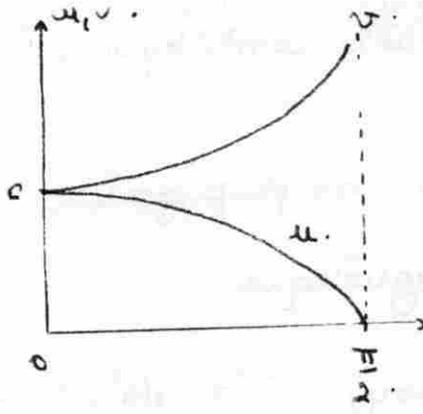
Flux moyen à travers un rectangle du plan d'onde de côtés  $b$  et  $d$

$$\langle \phi \rangle = \int_0^d dz \int_0^b dy \langle R_x \rangle = \boxed{\epsilon_0 E_0^2 \cos \alpha c b d}$$

$$(120) \quad \text{on a } \langle \phi \rangle = \left\langle \frac{dw}{dx} \right\rangle c \cos \alpha = u \left\langle \frac{dw}{dx} \right\rangle$$

$u$  vitesse de propagation de l'énergie :  $\boxed{u = c \cos \alpha \leq c}$

on sait  $\boxed{v = \frac{c}{\cos \alpha}} \Rightarrow \boxed{u = \frac{c^2}{v}}$



$a=0$ : onde plane  $u=v=c$ .

$a \neq 0$ : pas onde plane.

$u \leq c$

( $v > c$  mais ce n'est pas une vitesse de particule donc pas de désaccord avec la relativité).

DEM 104

\* force gravitationnelle:  $\vec{F}_1 = - \frac{G M_{\odot} m}{r^2} \vec{u}_r$ .

\* force de pression de radiation:  $\vec{F}_2 = \pi a^2 \langle u \rangle \vec{u}_r$ .

$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left( \pi a^2 \langle u \rangle - \frac{G M_{\odot} m}{r^2} \right) \vec{u}_r = \pi a^2 \left( \langle u \rangle - \frac{4G M_{\odot} \rho}{3r^2} \right) \vec{u}_r$

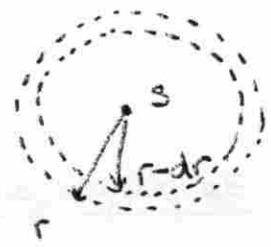
si  $a \leq \frac{3r^2 \langle u \rangle}{4G M_{\odot} \rho}$

alors  $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = d \vec{u}_r$

avec  $d < 0$

$\Rightarrow$  force de répulsion

Il faut calculer  $\langle u \rangle$  en fonction de  $P_{\odot}$  (puissance émise par le soleil).



A la distance  $r$ : l'énergie qui traverse la sphère de rayon  $r$  centrée sur  $S$ , pendant  $dt$  est:

$P_{\odot} dt = \langle u \rangle c dt 4\pi r^2$ .

ceci est l'énergie qui était comprise entre la sphère de rayon  $r$  et la sphère de rayon  $r + dr$  avec  $dr = c dt$

$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{P_{\odot}}{4\pi r^2 c}$

$\Rightarrow a_0 = \frac{3 P_{\odot}}{16 \pi c G M_{\odot} \rho}$

$a_0 = 0,19 \mu m$ .

de petites poussières sont repoussées par le soleil (par la pression de radiation)  $\rightarrow$  comète avec une queue opposée au soleil

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$$

1. Pfd à l'électron:

- force de Lorentz:  $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0)$ .

- force de frottement visqueux:  $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + e \vec{v} \wedge \vec{B} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{B}_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix}$$

on a

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} + \frac{eB_0}{m} v_y + \frac{1}{\tau} v_x = -e E_x \\ \frac{dv_y}{dt} - \frac{eB_0}{m} v_x + \frac{1}{\tau} v_y = -e E_y \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} v_z = -e E_z = 0 \end{cases} \quad \text{car onde plane} \Rightarrow \vec{E} \perp \text{à la direction de propagation.}$$

si  $v$  est de la forme  $v_0 e^{-i\omega t}$  en régime permanent et  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$  où  $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y$

on a:

$$\begin{cases} (-i\omega + \frac{1}{\tau}) v_x + \frac{eB_0}{m} v_y = -\frac{e}{m} E_{0x} \\ (i\omega + \frac{1}{\tau}) v_y - \frac{eB_0}{m} v_x = -\frac{e}{m} E_{0y} \end{cases}$$

et  $\vec{j} = -ne \vec{v} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} j_x &= -ne v_x \\ j_y &= -ne v_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\frac{1}{\tau} - i\omega) j_x + \omega_c j_y = E_{0x} \frac{ne^2}{m} \\ (\frac{1}{\tau} - i\omega) j_y - \omega_c j_x = \frac{ne^2}{m} E_{0y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j_x [(\frac{1}{\tau} - i\omega)^2 + \omega_c^2] = \frac{ne^2}{m} (\frac{1}{\tau} - i\omega) E_{0x} - \frac{ne^2}{m} \omega_c E_{0y} \\ j_y [(\frac{1}{\tau} - i\omega)^2 + \omega_c^2] = \frac{ne^2}{m} \omega_c E_{0x} + \frac{ne^2}{m} (\frac{1}{\tau} - i\omega) E_{0y} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} j_x = \frac{ne^2}{m} \left[ \frac{(\frac{1}{\tau} - i\omega) E_{0x} - \omega_c E_{0y}}{(\frac{1}{\tau} - i\omega)^2 + \omega_c^2} \right] \\ j_y = \frac{ne^2}{m} \left( \frac{\omega_c E_{0x} + (\frac{1}{\tau} - i\omega) E_{0y}}{(\frac{1}{\tau} - i\omega)^2 + \omega_c^2} \right) \end{cases}$$

$$\vec{j} = \tilde{\sigma} \vec{E} \quad \text{avec}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{ne^2}{m \left[ \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right)^2 + \omega_c^2 \right]} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} - i\omega & -\omega_c \\ \omega_c & \frac{1}{\tau} - i\omega \end{bmatrix}$$

2.  $\omega \ll \omega_c$  et  $\frac{1}{\tau} \ll \omega_c$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{div } \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\frac{d}{dt}(\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = -\Delta \vec{E}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt} = \mu_0 \tilde{\sigma} \frac{d\vec{E}}{dt}$$

avec la notation  $\frac{ne^2}{m\epsilon_0} = \omega_p^2$   $\tilde{\sigma}$  devient, compte tenu de  $\frac{1}{\tau} \ll \omega_c$  et  $\omega \ll \omega_c$ .

$$\tilde{\sigma} \approx \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c^2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_c \\ \omega_c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad \text{et } \frac{d\vec{E}}{dt} = -i\omega \vec{E}$$

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \left( -k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} (-i\omega) \begin{bmatrix} 0 & -\omega_c \\ \omega_c & 0 \end{bmatrix} \vec{E}$$

en projetant sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) - \frac{i\omega}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_c} E_y = 0 \\ E_y \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{i\omega_p^2 \omega}{\omega_c c^2} E_x = 0 \end{array} \right.$$

le système a une solution  $\neq (0,0)$  ou  $(E_{0x}, E_{0y})$  si :

$$D = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^2 - \frac{\omega^2 \omega_p^4}{c^4 \omega_c^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega \omega_p^2}{c^2 \omega_c} \Leftrightarrow$$

négligeable si  $\omega \ll \frac{\omega_p^2}{\omega_c}$

$$k^2 = \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 \omega_c}$$

3. Avec cette relation de dispersion, on a :

(5)

$$E_{0x} = \pm i E_{0y} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t + kx) \\ \pm E_{0x} \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{cases}$$

→ onde polarisée circulairement

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{\frac{\omega \omega_c}{\omega_p^2}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \omega = \frac{k^2 c^2 \omega_c}{\omega_p^2} \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{2k c^2 \omega_c}{\omega_p^2}$$

$$v_g = 2c \sqrt{\frac{\omega \omega_c}{\omega_p^2}} = 2v_{\varphi}$$

$$v_{\varphi} = 15,8 \text{ m/s} \quad v_g = 31,6 \text{ m/s}$$

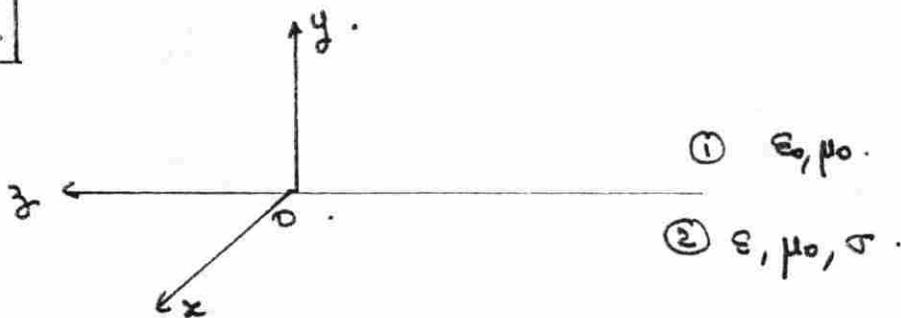
Calculons  $\omega_c$  et  $\omega_p$  pour voir si l'approximation  $\omega \ll \frac{\omega_p^2}{\omega_c}$  est justifiée :

$$\begin{cases} \omega_c = 9 \cdot 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \omega_p = 5,7 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

si  $\omega \ll \omega_c$  :  $\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \approx 10^{20} \text{ rad/s}$

alors on a toujours  $\omega \ll \frac{\omega_p^2}{\omega_c}$  satisfait

OEN 107



1. Equations de Maxwell dans ① :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E}_1 = - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div} \vec{B}_1 = 0 \\ \text{div} \vec{E}_1 = 0 \end{cases} \quad \left( \vec{j} = 0 \text{ et } \rho = 0 \right) \text{ en } \textcircled{1}$$

Equations de Maxwell dans ② :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div} \vec{E}_2 = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{E}_2 = - \frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \end{cases} \quad \left( \rho_2 = 0, \vec{j}_2 \neq \vec{0} \right)$$

Conditions de passage en  $\psi=0$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T1} - \vec{E}_{T2} &= \vec{0} & \vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2} &= \vec{0} \\ \epsilon_0 \vec{E}_{N1} - \epsilon \vec{E}_{N2} &= \sigma \vec{n}_{2 \rightarrow 1} & \vec{B}_{N1} - \vec{B}_{N2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

si on néglige les courants surfaciques  $\vec{j}_s$ .

$$\boxed{2} \quad \vec{B}_1 \left| \begin{array}{l} B_{01} e^{-i\alpha_1 y} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{B}_2 \left| \begin{array}{l} B_{02} e^{-i\alpha_2 y} e^{i(k_2 z - \omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

① :  $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = c^2 \text{rot } \vec{B}_1 = -i\omega \vec{E}_1$  si on admet la dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$  de  $\vec{E}_1$ .

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -i \frac{c^2}{\omega} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = i k_1 B_{01} e^{-i\alpha_1 y} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ -\frac{\partial B_{x1}}{\partial y} = i \alpha_1 B_{01} \text{ " " " } \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = -\frac{c^2}{\omega} B_{01} (k_1 \vec{u}_y + \alpha_1 \vec{u}_z) e^{-i\alpha_1 y} e^{i(k_1 z - \omega t)}}.$$

② :  $\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon} \text{rot } \vec{B}_2 - \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{E}_2$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{i}{\epsilon_2 \mu_0 \omega} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial B_{zx}}{\partial z} = i k_2 B_{02} e^{-i\alpha_2 y} e^{i(k_2 z - \omega t)} \\ -\frac{\partial B_{zx}}{\partial y} = i \alpha_2 B_{02} e^{-i\alpha_2 y} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -\frac{B_{02}}{\omega \epsilon_2 \mu_0} (k_2 \vec{u}_y + \alpha_2 \vec{u}_z) e^{-i\alpha_2 y} e^{i(k_2 z - \omega t)}}.$$

③ : on doit avoir, de plus :  $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}_1) = -\Delta \vec{E}_1 = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$ .

ce qui donne :  $\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$

soit :  $\boxed{\alpha_1^2 + k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$

②: et  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}_2) = -\Delta \vec{E}_2 = -\frac{d}{dt} \left( \mu_0 \vec{j}_2 + \epsilon \mu_0 \frac{d\vec{E}_2}{dt} \right)$  (6)

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}_2 = \epsilon \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}_2}{dt^2} + \mu_0 \frac{d\vec{j}_2}{dt} = \epsilon \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}_2}{dt^2} + \mu_0 \sigma \frac{d\vec{E}_2}{dt}$$

ce qui donne:  $\gamma_2^2 + k_2^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 + i \omega \mu_0 \sigma$ .

soit encore:  $\gamma_2^2 + k_2^2 = \mu_0 \omega^2 \epsilon_2$  avec  $\epsilon_2 = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$

ou:  $\gamma_2^2 + k_2^2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2}$

3-  $\epsilon \ll \frac{\sigma}{\omega}$  alors:  $\gamma_2^2 + k_2^2 \approx \frac{i \sigma}{\epsilon_0} \frac{\omega}{c^2}$

Pour calculer  $k_1, k_2, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  utilisons les relations de passage:

•  $\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2} = \vec{0} \Rightarrow$  en  $y=0$ :  $B_{01} e^{i(k_1 z - \omega t)} = B_{02} e^{i(k_2 z - \omega t)}$   
 $\forall z, \forall t$ .

$\Rightarrow B_{01} = B_{02}$  et  $k_1 = k_2 = k$

•  $\vec{E}_{T1} - \vec{E}_{T2} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\gamma_1}{\epsilon_0} = \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$

• de plus:  $k^2 + \gamma_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  (1)

~~$k^2 + \gamma_2^2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right] \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} + 1 \gamma_2^2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2}$~~

$k^2 + \gamma_2^2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{i \sigma}{\epsilon_0} \frac{\omega}{c^2}$  (2)

(1)-(2)  $\Rightarrow \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \right] = \gamma_1^2 \left( 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \right)$

$\Rightarrow \gamma_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_2} \right]$

alors  $\gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_0 (\epsilon_0 + \epsilon_2)}$

et finalement  $k_1^2 = k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0 + \epsilon_2}$

4.  $\lambda = 10000 \text{ m} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 6\pi \cdot 10^4 \text{ rad. s}^{-1}$

Cas de la Terre:  $\frac{\sigma_{\text{terre}}}{\omega} \sim \frac{10^{-8}}{6\pi} \text{ S.I}$  et  $\epsilon_{\text{terre}} \sim 3\epsilon_0 \sim \frac{10^{-9}}{12\pi} \text{ S.I}$

$\frac{\epsilon_{\text{terre}}}{(\sigma_{\text{terre}}/\omega)} = 0,05 \rightarrow$  l'approximation est justifiée si on ne désire pas une précision à plus de 5%.

Cas de l'océan:  $\frac{\sigma_{\text{mer}}}{\omega} \sim \frac{10^{-4}}{2\pi} \text{ S.I}$  et  $\epsilon_{\text{mer}} \sim 80\epsilon_0 \sim \frac{20}{9\pi} 10^{-9} \text{ S.I}$

$\frac{\epsilon_{\text{mer}}}{(\sigma_{\text{mer}}/\omega)} \approx \frac{60}{9} \cdot 10^{-5} \rightarrow$  approximation bien justifiée

Si on suppose quand même  $\epsilon_2 \neq i \frac{\sigma}{\omega}$  on a:

$\epsilon \ll \frac{\sigma}{\omega}$  et pour les 2 cas précédents  $\epsilon_0 < \epsilon$

$\Rightarrow \epsilon_0 \ll \epsilon_2$  également, d'où

$$\begin{cases} \sigma_1^2 \neq i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sigma \omega}{\epsilon} & \sigma_2^2 \neq i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \\ k_1^2 = k_2^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\sigma \omega}{\epsilon} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \pm (1-i) \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2\epsilon}} \\ \sigma_2 = \pm (1+i) \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} \end{cases}$  et  $k_1 = k_2 = \pm \frac{\omega}{c} \left( 1 + i \frac{\sigma \omega}{2\epsilon} \right)$

comme l'onde se propage vers les  $z > 0$ , on choisit le signe + pour  $k_1$  et  $k_2$ .

de plus,  $\vec{E}_2$  se propage vers les  $y$  décroissants on doit donc prendre le signe  $\oplus$  pour  $\sigma_2$ .  $\vec{E}_1$  se propage vers les  $y$  croissants (milieu  $\textcircled{1}$ ) donc on prend le signe  $\oplus$  pour  $\sigma_1$ .

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1-i) \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2\epsilon}} & k_1 = k_2 &= \frac{\omega}{c} \left( 1 + i \frac{\sigma \omega}{2\epsilon} \right) \\ \sigma_2 &= (1+i) \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_1 = B_{01} \vec{u}_x e^{-\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma}} y} e^{+i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma}} y} e^{-\frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} z} e^{+i \frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} z} \\ \vec{B}_2 = B_{02} \vec{u}_x e^{-\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} y} e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} y} e^{-\frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} z} e^{+i \frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} z} \end{cases}$$

il y a décroissance de l'amplitude de l'onde suivant  $z$  et aussi suivant  $y$ . Elle décroît plus vite dans ② que dans ①, selon  $Oy$  et elle décroît plus vite selon  $Oy$  que selon  $Oz$ .

$$\delta = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \frac{c}{\omega} \quad \text{épaisseur de pénétration dans ②}$$

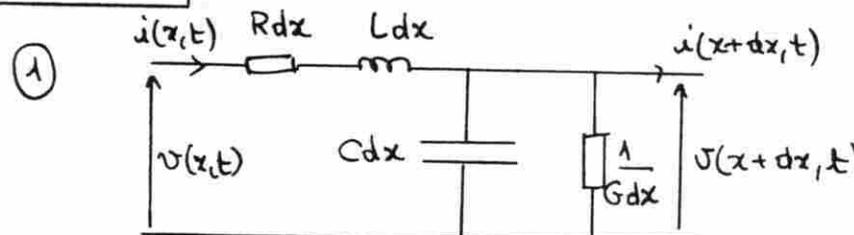
AN:  $\delta_{\text{mar}} = 1,7 \text{ m}$ .

$$e^{-y/\delta} = 10^{-6} \Leftrightarrow y = 6\delta \ln 10 = 23,2 \text{ m. c'est peu.}$$

épaisseur sur la Terre:  $e^{-\frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma_{\text{terre}}} d} = 10^{-6}$ .

$$\Leftrightarrow d = 2650 \text{ km.}$$

**ON 108**



$$-v(x+dx,t) + v(x,t) = Rdx i(x,t) + Ldx \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -Ri - L\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)$$

$$i(x+dx,t) - i(x,t) = -Cdx \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - Gdx v(x,t) \Rightarrow \left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) = -Gv - C\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv$$

terme d'ordre unipaire dans l'éq de propagation  
 $\equiv$  partie imaginaire pour se donc amortissement le long de la ligne.

$$\textcircled{2} \quad \underline{v}(x,t) = \underline{v}(x) e^{j\omega t}$$

$$LC = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\textcircled{a} \quad \frac{d^2 \underline{v}}{dx^2} + LC \underline{v}(x) \omega^2 = (RC + LG) j\omega \underline{v} + RG \underline{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{v}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{v} = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = RG - \frac{\omega^2}{c^2} + j\omega(RC + LG)$$

$$\textcircled{b} \quad \text{Solutions:} \quad \underline{v}(x) = \underbrace{A e^{\alpha x}}_{v'(x)} + \underbrace{B e^{-\alpha x}}_{v''(x)}$$

$$\text{si } \gamma = \alpha + j\beta : \quad \underline{v}(x) = A e^{\alpha x} e^{j\beta x} + B e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\Rightarrow \underline{v}(x,t) = A e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \omega t)} + B e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

ondes planes progressives amorties le long de  $ox$ .

$$\text{comme:} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -Ri - L \left( \frac{di}{dt} \right) = - (R + jL\omega) i = \gamma v'(x) - \gamma v''(x)$$

$$\Rightarrow \underline{i}(x,t) = \frac{1}{Z_c} (v'(x) - v''(x)) e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad Z_c = \frac{R + jL\omega}{\gamma}$$

Dans  $\gamma$ , il faut que  $\alpha$  et  $\beta$  soient de même signe car une onde amplifiée spontanément le long de  $ox$  n'a pas de réalité physique.

$\textcircled{3}$

$$\textcircled{a} \quad \gamma^2 = RG - \frac{\omega^2}{c^2} + j\omega(RC + LG) = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \beta^2 = RG - \frac{\omega^2}{c^2} \\ \alpha\beta = \frac{\omega}{2} (RC + LG) \end{array} \right.$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{RG}{L\omega^2} - 1 \right) + jL\omega^2 \left( \frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right)$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \frac{RG}{L\omega^2} - 1 \right) + j \left( \frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \gamma \neq j\frac{\omega}{c} \left[ 1 - \frac{j}{2} \left( \frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right) - \frac{RG}{L\omega^2} + \frac{1}{8} \left( \frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right)^2 \right] \text{ au } 2^{\text{e}} \text{ ordre}$$

$$\Rightarrow \gamma \neq \underbrace{\frac{1}{2c} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)}_{\alpha} + j \underbrace{\frac{\omega}{c} \left[ 1 + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right]}_{\beta}$$

Le calcul montre que  $\alpha$  et  $\beta$  sont bien du même signe -

vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^{-1} = \frac{c}{1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2} \approx c \left[ 1 - \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 \right]$$

ⓑ Pour éviter la déformation des signaux lors de leur propagation, il faut que  $v_{\varphi}$  ne dépende pas de  $\omega$ .

donc condition de Heaviside :  $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$  - alors :  $v_{\varphi} = c$

Ⓒ  $\frac{R}{L} = \frac{3,9 \cdot 10^{-2}}{2,6 \cdot 10^{-7}}$        $\frac{G}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{428 \cdot 10^{-12}} = 47 \text{ SI}$

$\frac{R}{L} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ SI}$

La condition est donc d'être vérifiée.

Pour  $R$  et  $G$  étant fixés par le choix du conducteur et de l'isolant, il faudrait

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{G} = 2 \cdot 10^7 \Omega^2 = \frac{\mu_0}{4\pi^2 \epsilon_0} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2 \quad \text{ce qui donnerait : } \frac{b}{a} = 10^{32} !!$$

$\Rightarrow$  impossible

Ⓣ  $v_{\varphi} = c \left[ 1 - \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 \right]$  or  $\frac{R}{L} \gg \frac{G}{C}$  et  $\omega = 2\pi f$ .

$$\Rightarrow v_{\varphi} = c \left( 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{2\pi f L}\right)^2 \right) = 0,68c$$

Ⓤ Rectangulaire de fréquence  $f$ . 1<sup>er</sup> harmonique :  $3f$ .

Le temps de propagation du fondamental est :  $t_1 = \frac{l}{v(f)}$

" " du 3<sup>er</sup> harmonique :  $t_3 = \frac{l}{v(3f)} < t_1$

$$\Rightarrow \Delta t = l \left( \frac{1}{v(f)} - \frac{1}{v(3f)} \right) \approx \frac{l}{c} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{2\pi f L}\right)^2 - 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{R}{2\pi f L}\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \Delta t \approx \frac{1}{9} \frac{l}{c} \left(\frac{R}{2\pi f L}\right)^2 \quad \text{soit : } \Delta t = \frac{l}{c} \frac{8}{9} (1 - v_{\varphi})$$

$$\Delta t \leq \frac{10^{-2}}{f} \Leftrightarrow \frac{8l}{9c} (1 - v_{\varphi}) = \frac{10^{-2}}{f} \quad \text{et } d_0 = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow l_m = \frac{9}{8} \frac{10^{-2}}{1 - v_{\varphi}} d_0$$

$l_m = 700 \text{ m}$ . Très faible pour longueur de ligne

\* Amortissement:  $e^{-\alpha x}$  avec  $\alpha \neq \frac{R}{2L}$  car  $\frac{R}{L} \gg \frac{G}{C}$

atténuation de 3dB:  $x / e^{-\alpha x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{x_a = \frac{\ln 2}{2\alpha} = \ln 2 \frac{CL}{R}}$

$x_a = 1,39 \text{ km}$  amortissement important.

ON 409

1°)  $F_e = eE$   
 $F_m = e v B$  or  $B \approx \frac{E}{c} \Rightarrow F_m \approx \frac{eE v}{c}$ .  $\ll F_e$  si  $v \ll c$ .  
 particules non relativistes

2°)  $M \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} = -i\omega M \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = i \frac{e}{M\omega} \vec{E}}$   
 de même:  $\boxed{\vec{v} = -i \frac{e}{m\omega} \vec{E}}$

$\vec{j} = m_0 e (\vec{v} - \vec{v}) = i \frac{m_0 e^2}{\omega} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \vec{E}$

$\|\vec{v}\| \ll \|\vec{v}\|$  car  $M \gg m$  d'où  $\vec{j} \approx i \frac{m_0 e^2}{m\omega} \vec{E}$  due  $\approx$  qu'aux  $e^-$

avec  $\frac{m_0 e^2}{m} = \epsilon_0 \omega_p^2$ :  $\boxed{\vec{j} = i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}}$

3°)  $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{div} \vec{E} = 0$   
 $\Rightarrow$

or  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Comme a priori  $\omega \neq \omega_p$ : les 2 équations ne sont compatibles que si  $\rho = 0$ .

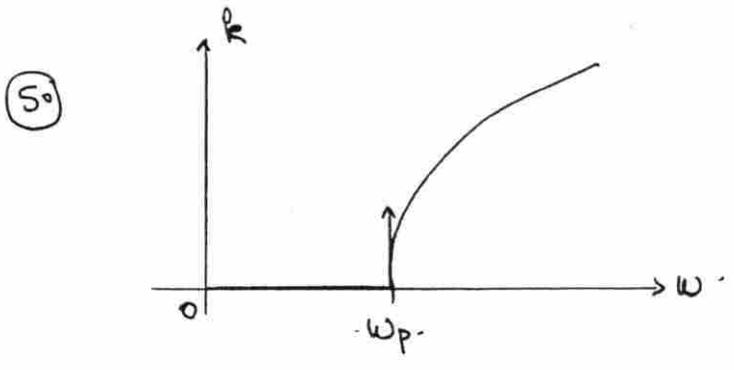
Alors  $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{e}_z$  transversal

4°)  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$   
 $\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = - \Delta \vec{E} - \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) = - \Delta \vec{E}$   
 $= - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$$\Rightarrow -\vec{\Delta E} = -\mu_0 \frac{d^2 \vec{J}}{dt^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \left[ \vec{\Delta E} - i\epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \right] \quad \text{éq. de propagation dans le plasma.}$$

$$\Rightarrow -k^2 - \frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{D'où relation de dispersion: } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

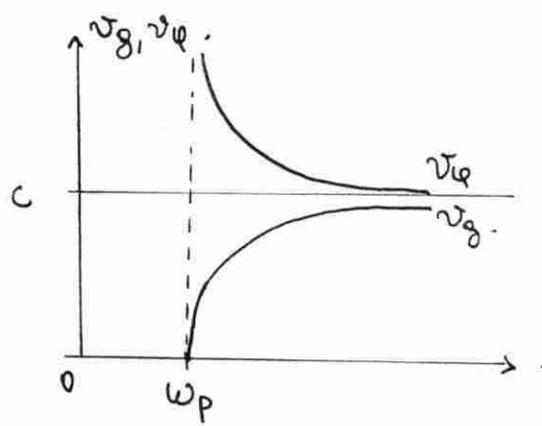


$\omega < \omega_p$ :  $k$  imaginaire pure  
onde évanescente

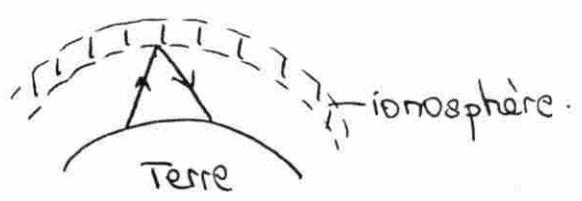
$\omega > \omega_p$ : onde non amortie progressive

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

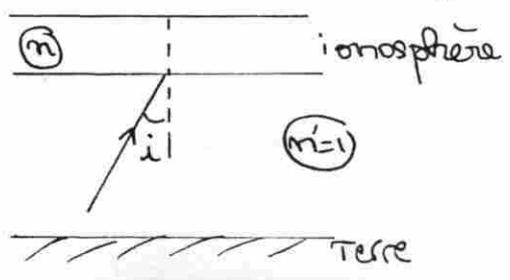
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{c^2}{v_p}$$



L'onde à  $\omega < \omega_p$ , arrivant sur l'ionosphère, n'y pénètre pas. Elle est réfléchie sur l'interface.



Indice  $n$  du plasma:  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$



$$\sin i = n \sin r$$

$r$  existe si  $|\sin i| \leq 1$

soit  $i \leq \text{Arcsin } n$

Si  $\omega \leq \omega_{\text{max}} = \text{Arccos} \frac{v_p}{c}$  d'onde peut se propager.

Si  $\omega > \omega_{\text{max}}$  : il y a réflexion totale sur l'interface.

AN:  $\omega = 9 \text{ MHz} = \left[ \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \right]^{1/2} \Rightarrow N \approx 10^{12} \text{ e}^- \cdot \text{m}^{-3}$  très dilué

$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$   $\lambda_1 = 1376 \text{ m} \Rightarrow f_1 = 218 \text{ kHz} \rightarrow$  réflexion totale  
 $\lambda_2 = 2,85 \text{ m} \Rightarrow f_2 = 105 \text{ MHz}$  non total! réfléchi

(60)

a)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha m \vec{v} = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{v} (-i\omega + \alpha) = -e \vec{E}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{-e}{m(\alpha - i\omega)} \vec{E}$

$\Rightarrow \vec{j} = -Ne \vec{v} = \frac{Ne^2}{m(\alpha - i\omega)} \vec{E}$

Relation de propagation:  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$   
 $-k^2 = -\frac{\mu_0 e^2 N i \omega}{m(\alpha - i\omega)} + \frac{\omega^2}{c^2}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 + i\alpha/\omega)} \right]$

Permittivité complexe:  $\epsilon = \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(1 + i\alpha/\omega)} \right]$

$\begin{cases} \text{Re}(\epsilon) = \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \alpha^2} \right] \\ \text{Im}(\epsilon) = \epsilon_0 \frac{\alpha \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \alpha^2)} \end{cases}$

b) Faibles pertes en BF:  $\omega^2 \ll \alpha^2 \ll \omega_p^2 \quad k^2 \approx i \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2}$   
 $\Rightarrow k = (1+i) \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$  du type  $k = \frac{1+i}{\delta}$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} \frac{c}{\omega_p}$

donc  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\delta/\delta} \cos(\omega t - \delta/\delta)$  onde progressive amortie  
 (même pour  $\omega < \omega_p$  propagation possible)

faibles pertes en HF:  $\omega^2 \ll \omega_p^2 \ll \omega^4$

$$k^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\omega p^2}{c^2 \omega} \quad \text{et} \quad k \approx \frac{\omega}{c} \left( 1 + i \frac{\omega p^2}{2\omega^3} \right) = \frac{\omega}{c} + \frac{i}{\delta'}$$

$$\text{avec } \delta' = \frac{2c\omega^3}{\omega p^2}$$

La propagation (liée à  $\text{Re}(k) = \frac{\omega}{c}$ ) se fait comme en l'absence de perturbations - onde légèrement amortie (en  $\frac{1}{\delta'}$ ).

**ON 110**

A - Conducteur en régime continu ; loi d'Ohm.

(a)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e \vec{E}$  (10)

$$\Rightarrow v = A e^{-t/\tau} + \frac{-e\tau}{m} E_0 \quad \text{à } t=0: v=0 \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0 (1 - e^{-t/\tau})}$$

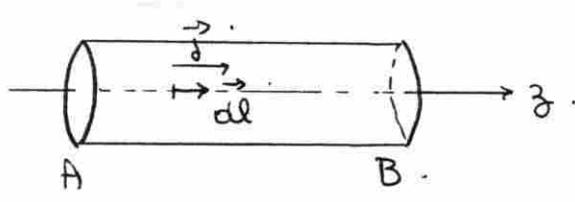
$\tau$  représente le temps de relaxation du système, la durée caractéristique du régime transitoire.

(b)  $\boxed{\vec{v}_e = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0}$   $\vec{j} = -ne\vec{v} \Rightarrow \boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$

AN:  $\tau = 4,9 \cdot 10^{-14} \text{ s}$  très faible

Le régime permanent est atteint immédiatement en régime continu.

(a)  $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{1}{\sigma_0} \vec{j} \cdot d\vec{l}$   
 $= \frac{1}{\sigma} j \cdot L \quad \text{et} \quad j = \frac{I}{S}$



$$\Rightarrow \boxed{V_A - V_B = R_0 I \quad \text{avec} \quad R_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}}$$

(b)  $\boxed{P = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d\tau = \sigma_0 E_0^2 L S = R_0 I^2}$

Autre méthode: pendant un temps  $\Delta t = \frac{L}{v_e}$  <sup>mis par  $1e$  pour aller de A à B.</sup> il y a un nombre  $nSL$  d'électrons qui traversent une section droite. chaque  $e^-$  qui traverse de A à B acquiert une énergie  $e(V_A - V_B)$ .

d'où pendant  $\Delta t$ : une énergie  $\Delta E$  est transférée aux  $e^-$  entre A et B.  
 $\Delta E = n S v_d e (V_A - V_B)$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = n S v_d e (V_A - V_B) = \frac{n e S I (V_A - V_B)}{n e S} \quad \text{car } v_d = \frac{j}{n e} = \frac{I}{n e S}$$

$$\Rightarrow \underline{P = R_0 I^2}$$

Puis cette énergie est transférée aux  $e^-$ , transformée en agitation thermique des  $e^-$  (effet Joule) et des ions lors des chocs.

## B. Conducteur en régime variable ; épaisseur de peau.

a)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e \vec{E} = -e E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z = m(i\omega + \frac{1}{\tau}) \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v} = - \frac{e E_0 \tau}{m} \frac{e^{i\omega t} \vec{u}_z}{1 + i\omega\tau} = - \frac{e \tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

b) on a encore  $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$  avec  $\underline{\sigma} = \frac{n e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$

$\rightarrow \underline{\sigma}$  dépend de  $\omega$ : il y a dispersion

$\rightarrow \underline{\sigma}$  a une partie réelle  $\Rightarrow$  composante de  $\vec{j}$  en phase avec  $\vec{E}$   
 une partie imaginaire  $\Rightarrow$  " " quadrature

AN:  $|\sigma| = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \frac{|\sigma| + \sigma_0}{\sigma_0} \leq 1\% \Leftrightarrow \frac{|\sigma|}{\sigma_0} \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow 1 + \omega^2 \tau^2 \leq \left(\frac{1}{0,99}\right)^2 \Leftrightarrow \underline{f_c = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ Hz}}$$

c)  $\left. \begin{array}{l} \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = i\omega \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} = \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_0}$

pour  $\omega = \omega_c$ :  $\frac{\omega_c \epsilon_0}{\sigma_0} \approx 10^{-6} \ll 1$

$\Rightarrow$  pour  $f < f_c$ :  $\vec{j}_D$  est négligeable devant  $\vec{j}$

(d) En régime variable, le couplage entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans les éq. de Maxwell  $\Rightarrow$   $\vec{E}$  correspond à une onde donc où  $\vec{E}$  dépend aussi des variables d'espace

(a)  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  or  $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i\omega}{\sigma} \rho$   
 or  $\text{div } \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  - ceci n'est compatible que si  $\rho = 0$ .

(b)  $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\Delta \vec{E} = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  et  $\sigma \neq \sigma_0$

(c) ~~On cherche  $\vec{E}$  sous la forme d'une onde plane se propageant selon~~  
 Le problème est à symétrie cylindrique.  $\vec{E} = \vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_z$

$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = (\mu_0 \sigma i\omega - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2) E(r)$

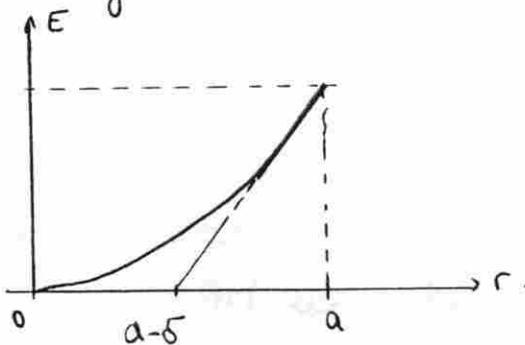
négligeable si on néglige les courants de déplacement

$\vec{E} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta] e^{i\omega t} \vec{u}_z$  est solution de cette équation si:

$\frac{2i}{\delta^2} - \frac{(1+i)}{r\delta}$  négligeable  $= i\mu_0 \sigma \omega$  pour  $r \gg \delta$ .

d'où  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

(d) on a affaire à une onde cylindrique divergente, axiale sur une distance de l'ordre de quelques  $\delta$ , lorsqu'on s'enfonce dans le cylindre conducteur



AN: pour Cu : à  $f = 50 \text{ Hz}$   $\delta = 9,3 \text{ mm} \gg a$   
 à  $f_{\text{max}} = 100 \text{ kHz}$   $\delta = 0,2 \text{ mm}$  du même ordre de grandeur que  $a$ .

Tout se passe comme en  $f=0$ , le courant est uniformément réparti dans tout le volume du conducteur.

à  $f_{\text{radio}} = 100 \text{ MHz}$  :  $\delta = 6,6 \mu\text{m}$ .

Les courants restent localisés sur une très faible épaisseur au voisinage de la surface du conducteur.

La section sur laquelle circulent les courants est très diminuée ce qui augmente fort la résistance et amoindrit les signaux.

c. Conducteurs à très haute fréquence ; plasmon.

(10)  $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\epsilon}$

a)  $\frac{|\underline{\sigma}|}{|\sigma_0|} = \frac{1}{100} \Rightarrow 1 + \omega^2\epsilon^2 = 10^4 \Rightarrow \boxed{f_c' = \frac{100}{2\pi\epsilon} = 8,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$

correspond à  $\lambda_c' = 360 \text{ nm} \Rightarrow \underline{\text{UV}}$ .

b)  $f > f_c'$  :  $\omega\epsilon \gg 1$  d'où  $\underline{\sigma} \approx -i \frac{\sigma_0}{\omega\epsilon}$  soit  $\boxed{\underline{\sigma} \approx -i \frac{ne^2}{m\omega}}$

cela revient à négliger la force de frottement dans l'éq. du mouvement de l'électron.

AN:  $\left. \begin{array}{l} \sigma_0 = 2,2 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} \\ n = 2,7 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\epsilon = 29 \cdot 10^{-14} \text{ s}}$  d'où  $\boxed{f_c' = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$

correspond à  $\lambda_c' = 546 \text{ nm} \Rightarrow \underline{\text{vert (visible)}}$ .

Les deux métaux ont des comportements très voisins.

c) Puissance dissipée par effet Joule :  $\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$  / m. de volume.

Pour  $E$  donné, en HF, on a donc les pertes par effet Joule diminuent (2<sup>e</sup> proposition). on retrouve le fait que les forces de frottement sont négligeables en HF.

(d)  $\vec{j}_D = i \epsilon_0 \omega \vec{E}$  (12)  
 $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E}$   $\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{m \epsilon_0 \omega^2}{ne^2} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$

AN:  $\omega_p = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$   
 pour  $\omega = \omega_c$ :  $\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} = 0,08$  pour le cuivre.

$\omega_p = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$   
 pour  $\omega = \omega_c$ :  $\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = 0,14$  pour le sodium.

on ne peut alors plus négliger  $\vec{j}_D$  devant  $\vec{j}$  en HF

(e)  $\text{div} \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0 = \text{div}(\sigma \vec{E}) + i\omega \rho$

$\Rightarrow \text{div} \vec{E} = -\frac{i\omega}{\sigma} \rho$  ou  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow$  régime harmonique possible ssi  $-\frac{i\omega}{\sigma} \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  avec  $\sigma = -i \frac{ne^2}{m\omega}$

$\Rightarrow \frac{m\omega^2}{ne^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \omega = \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

AN: cuivre:  $\omega_p = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  UV  $> \omega_c$   
sodium:  $\omega_p = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  UV  $> \omega_c$ .

Soi on peut avoir, pour  $\omega = \omega_p$ ,  $\rho \neq 0$  et donc  $\text{div} \vec{E} \neq 0$ . Le champ n'est pas transversal, il a une composante longitudinale.

Les électrons ont des mouvements longitudinaux non amortis, qui conduisent localement à des densités de charge non nulles.

Sans approximation sur  $\sigma$ , une terme d'amortissement apparaît, comme en plus basse fréquence.

(20)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\sigma} \vec{v} = -e \vec{E}$

(a) avec  $\vec{j} = -ne \vec{v}$ :  $\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{1}{\sigma} \vec{j} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$

$$\textcircled{b} \quad \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = -\Delta \vec{B} = \text{rot} \left( \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \mu_0 \text{rot} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \text{rot} \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \text{rot} \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} = -\mu_0 \text{rot} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = -\mu_0 \text{rot} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = -\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \mu_0 \text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \vec{j} - \frac{ne^2}{m} \vec{E} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{\sigma} \text{rot} \vec{j} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} \text{rot} \vec{E}$$

avec :  $\mu_0 \text{rot} \vec{j} = - \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{1}{c^2} \omega_p^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left( \frac{1}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\textcircled{c} \quad \left( \frac{1}{\sigma} + i\omega \right) \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) = i\omega \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

soit :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1 + i\omega\sigma}{1 + i\omega\sigma} \right]}$$

$$\textcircled{d} \quad \underline{\omega\sigma \ll 1} : k \approx -i \frac{\omega\omega_p^2\sigma}{c^2} \quad \text{car} \quad \frac{\omega_p^2\sigma}{\omega} \gg 1$$

d'où  $k = \frac{1-i}{\delta}$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

on retrouve l'onde évanescente et l'effet de peau du B).

$$\textcircled{e} \quad \underline{\omega\sigma \gg 1} : k^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

- pour  $\omega < \omega_p$  :  $k$  imaginaire pure  $\Rightarrow$  onde évanescente - un faisceau de lumière visible est réfléchi sans pénétrer

- pour  $\omega > \omega_p$  :  $k$  réel - propagation avec dispersion - on est dans la zone de transparence du métal.

## Résolution de problème

# Le wifi

### Exemple de résolution

<b>S'appropriier le problème.</b>	– Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole.
-----------------------------------	--

L'émetteur wifi est omnidirectionnel : il émet une onde sphérique.

La taille de l'antenne est

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\nu} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 2,45 \times 10^9} = 3 \text{ cm}$$

Les limites de  $E$  ( $E_{max} = 61 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ),  $B$  ( $B_{max} = 0,20 \text{ } \mu\text{T}$ ) et  $\Pi$  ( $\Pi_{max} = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) sont données dans le texte.

<b>Analyser</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Organiser et exploiter ses connaissances ou les informations extraites.</li> <li>– Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées.</li> <li>– Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées.</li> <li>– Établir une stratégie de résolution.</li> </ul>
-----------------	---

Il faut considérer que l'on se trouve à une distance  $r$  de l'antenne. On prendra  $r > r_{min} = 4 \text{ cm}$ .

La "densité de puissance" est, au plus,

$$\Pi_{max} = \frac{P_{max}}{4\pi r_{min}^2}$$

Il s'agit de déterminer  $P_{max}$  à partir des limites de  $E$ ,  $B$  et  $\Pi$  données dans le texte.

<b>Réaliser</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée.</li> <li>– Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique.</li> </ul>
-----------------	--

Le calcul donne

$$P_{max} = 4\pi r_{min}^2 \Pi_{max} = 2\pi \times 0,04^2 \times 10 \approx 0,1 \text{ W}$$

Comme  $P_{max} = 4\pi r_{min}^2 <\Pi>$  avec

$$<\Pi> = c <e_{em}> = c \left\langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = c \left( \frac{\varepsilon_0 E_{max}^2}{4} + \frac{B_{max}^2}{4\mu_0} \right) = c \frac{\varepsilon_0 E_{max}^2}{2} = c \frac{B_{max}^2}{2\mu_0}$$

on trouve grâce au champ électrique de référence :

$$P_{max} = 4\pi r_{min}^2 c \frac{\varepsilon_0 E_{max}^2}{2} = 4\pi \times 0,04^2 \times 3 \times 10^8 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 0,5 \times 61^2 \approx 0,1 \text{ W}$$

on trouve grâce au champ magnétique de référence :

$$P_{max} = 4\pi r_{min}^2 c \frac{B_{max}^2}{2\mu_0} = 4\pi \times 0,04^2 \times 3 \times 10^8 \times 0,5 \times \frac{(2 \times 10^{-7})^2}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 0,1 \text{ W}$$

<b>Valider</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Discuter de la pertinence du résultat trouvé (identification des sources d'erreur, choix des modèles, formulation des hypothèses,...).</li> <li>– Étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue</li> </ul>
----------------	--

Une autre modélisation possible du DAS est la suivante : la tête absorbe la moitié de la puissance, elle est assimilée à une sphère de rayon  $R \approx 10 \text{ cm}$ , d'eau (de masse volumique  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , soit de masse

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu \approx \frac{4}{3}\pi \times (0,1)^3 \times 10^3 \approx 4 \text{ kg}$$

On aurait donc un DAS du wifi, au maximum de  $0,025 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ , qui est 8 fois plus petit que ce qui est donné par le document, donc pas très éloigné.

NB : en fait la limite légale est... 100 mW!