

EM 007

Emission α .

(10) On. de Gauss: sur une sphère de centre O de rayon r

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q(t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r, t) = \frac{q(t)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r} \quad \text{et } \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$$

sur les symétries radiales des courants

$t < \frac{r}{c}$ $q(t) = q_0$

$t > \frac{r}{c}$ $q(t) = q_0 e^{-\lambda(t - \frac{r}{c})}$ $E = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} (e^{-\lambda(t - \frac{r}{c})} - 1)$

(20) L'équation globale de conservation de la charge sur une sphère de rayon r s'écrit :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{dQ_{int}}{dt} \quad \text{avec } \frac{dQ}{dt} = \frac{dq}{dt} = -\lambda q_0 e^{-\lambda(t - \frac{r}{c})}$$

comme le pb est à symétrie sphérique $\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{\lambda q_0 e^{-\lambda(t - \frac{r}{c})}}{4\pi r^2} \vec{u}_r}$$

(30) Equation de Maxwell-Ampère: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\mu_0 \vec{j} = \frac{\mu_0 \lambda q_0 e^{-\lambda(t - \frac{r}{c})}}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi \epsilon_0} (-\lambda q_0 e^{-\lambda(t - \frac{r}{c})}) \vec{u}_r$$

$\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ compatible

EM 008

(10) $\vec{E} = E(r) \cos \omega t \vec{u}_z$

En un point entre les armatures, $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$ d'où \vec{E} vérifie:

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En projection sur oz cela donne: $\Delta E(r) + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) = 0$.

En coordonnées cylindriques: $\Delta E(r) = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) = 0}$$

on cherche $E(r)$ sous la forme :

$$E(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\omega}{c}\right)^n$$

$$\frac{dE}{dr} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left(\frac{\omega}{c}\right) \left(\frac{r\omega}{c}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \left(\frac{\omega}{c}\right) \left(\frac{r\omega}{c}\right)^n$$

$$\frac{d^2E}{dr^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_{n-1} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{r\omega}{c}\right)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{r\omega}{c}\right)^n$$

Alors l'équa. diff s'écrit :

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (n+1)(n+2) a_{n+2} \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \left(\frac{\omega}{c}\right) \frac{1}{r} \left(\frac{r\omega}{c}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\omega}{c}\right)^n \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\omega}{c}\right) \frac{a_1}{r} + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n+2) a_{n+2} + a_n \right] x^n = 0 \quad \forall r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0 \quad \forall n \end{cases}$$

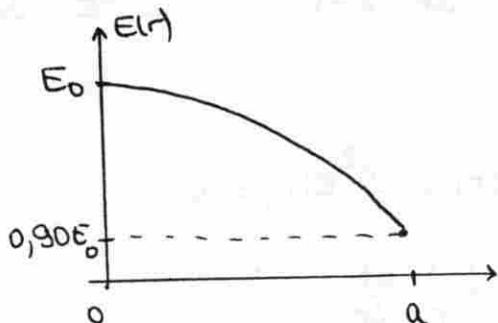
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2} \text{ pour } n \text{ pair} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} (n!)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad \text{soit } \boxed{E(x) = E_0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\right)}$$

pour $x < 1$ tout au moins

(2) Pour $f = 1 \text{ GHz}$: $\omega = 2\pi \cdot 10^9 \text{ rad. s}^{-1}$

\Rightarrow comme r varie de 0 à 3 cm = 0,03 m : x varie de 0 à $0,2\pi$



Si $f < 100 \text{ MHz}$: $E(r)$ varie encore moins, on peut donc considérer E comme uniforme à l'intérieur de c .

(30) Pour $\omega < 400 \text{ Hz}$: $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z \cos \omega t$

(2)

Eq. de Maxwell - Ampère: $\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega E_0 \sin \omega t \vec{u}_z$

on va en supposer \vec{B} de la forme: $B(r,t) \vec{u}_\theta$

$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB) \vec{u}_z \Rightarrow \frac{d}{dr} (rB) = -\frac{\omega}{c^2} E_0 r \sin \omega t$

$\Rightarrow rB(r,t) = -\frac{\omega}{c^2} E_0 \frac{r^2}{2} \sin \omega t$

$\Rightarrow \vec{B}(r,t) = -\frac{\omega}{c^2} E_0 \frac{r}{2} \sin \omega t \vec{u}_\theta$

(40) $E(x) = E_0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{467456} - \frac{x^{10}}{14745600} \right)$

of MAPLE $+ \frac{x^{12}}{2^{24} (6!)^2}$

EM 009

$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$ en coord. cylindriques en négligeant les effets de bord.

Par la Th. de Gauss: $\vec{E} = \frac{A}{r} \vec{u}_r$ sur une cylindre de rayon r

ou $V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = A \ln \frac{b}{a}$

D'où en remplaçant q par sa valeur:

$\vec{E} = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{u}_r$

dans le trou cylindrique

Th. de Maxwell - Ampère sur une cercle de rayon r : $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$

$2\pi r B(r) = \mu_0 \left(\frac{dq}{dt} \right)$

$\Rightarrow \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left(\frac{dq}{dt} \right) \vec{u}_\theta$

Revenons traversant une section droite du trou:

$P = \iint_S \vec{R} \cdot d\vec{s} = \frac{\delta W}{dt} \quad \vec{R} = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{dq}{dt} \right) \vec{u}_z$

$P = \int_a^b 2\pi r dr \frac{1}{2\pi r^2} \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{dq}{dt} \right) = V \left(\frac{dq}{dt} \right) \Rightarrow \delta W = V dq$

EM 010

$$\vec{j} = j(r) \vec{u}_z$$

① Par symétrie cylindrique : $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$

$$\text{et } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 \int_0^r 2\pi u j(u) du$$

$$\text{en dérivant / à } r : \frac{d}{dr}(rB(r)) = \mu_0 r j(r) \quad \text{et } B(r) > 0 \text{ ou } j(r) > 0$$

La force magnétique volumique :
$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B} = -j(r) B(r) \vec{u}_r$$

→ force radiale dirigée vers l'intérieur du conducteur qui tend à comprimer la colonne de fluide → striction

② Le fluide conducteur, parcouru par des courants, génère un champ \vec{B} d'où striction comme vu au ① - cette compression implique un réchauffement local du gaz (compte tenu de la faible conductivité thermique, adiabatique)

si l'échauffement est très important : ionisation donc courant et striction de + en + forts (pour $T >$ qqes milliers de $^\circ$) et la phénomène s'auto-accélère.

→ colonne très fine fortement ionisée et conductrice, qui émet de la lumière : l'éclair

EM 011

① Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\text{ou : } \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

\mathcal{C} cercle d'axe oz de rayon r $r \in [a; b]$

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 I(z, t) \quad \text{car } \vec{E} \text{ et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \perp d\vec{s} \parallel \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r, z, t) = \frac{\mu_0 I(z, t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

(20) $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ car les 2 conducteurs $\vec{j} = \vec{0}$. (3)

alors: $\left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)$ ou $\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = i\omega E(r, z, t)$ ici

$\Rightarrow \vec{E}(r, z, t) = \frac{i}{2\pi r \omega \epsilon_0} \left(\frac{dI}{dz} \right) e^{i\omega t} \vec{u}_r$

(30) (MF): $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial z}$

d'où: $\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} I(z) = 0$

ou pose $k = \frac{\omega}{c}$ $I(z) = I_0 e^{-ikz} + I'_0 e^{ikz}$

$\Rightarrow I(z, t) = I_0 e^{i(\omega t - kz)} + I'_0 e^{i(\omega t + kz)}$

si on raisonne que les ondes de courant se propagent dans le sens des z croissants: $\underline{I(z, t) = I_0 e^{i(\omega t - kz)}}$.

(40) $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ réél.

$\vec{R} = \frac{I_0^2}{(2\pi r)^2} \frac{1}{\epsilon_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$

$\langle \vec{R} \rangle = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{r^2} \vec{u}_z$

Puissance moyenne transportée par le câble:

$\langle P \rangle = \int_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr$

$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c} \ln \frac{b}{a}$

Conducteur soumis à un champ électrique uniforme

2.a. $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \gamma E_0 \mathbf{u}_z$. 2.b. $r \geq a$, $\mathbf{B}(r) = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma E_0 \frac{a^2}{r} \mathbf{u}_\theta$; $r \leq a$, $\mathbf{B}(r) = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma E_0 r \mathbf{u}_\theta$

2.c. $r \leq a$, $\mathbf{\Pi} = -\frac{\gamma E_0^2 r}{2} \mathbf{u}_r$ et $\Phi_s = -\gamma E_0^2 (\pi r^2 h)$; $r \geq a$, $\mathbf{\Pi} = -\frac{\gamma E_0^2 a^2}{2r} \mathbf{u}_r$ et $\Phi_s = -\gamma E_0^2 (\pi a^2 h)$.

Bilan énergétique associé à l'effet de peau

6.a. $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\gamma} = \frac{B_0}{\mu_0 \gamma \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) [\cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) - \sin(\omega t - \frac{z}{\delta})] \mathbf{e}_x$.

6.b. $\mathbf{\Pi}(0,t) = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta} \cos \omega t [\cos \omega t - \sin \omega t] \mathbf{e}_z$. $P = \langle \mathbf{\Pi}(0,t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle \Delta x \Delta y = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} \Delta x \Delta y$.

6.c. Effet Joule : $P_J = \int_0^\infty \frac{\langle j^2 \rangle}{\gamma} \Delta x \Delta y dz = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} \Delta x \Delta y = P$.



1. En écrivant le Principe Fondamental de la Dynamique à un porteur dans un référentiel galiléen, on obtient :

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e \cdot \mathbf{E} + m \cdot \mathbf{g} + e \cdot \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}.$$

En négligeant toute autre force que la force électrique on a : $m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e \cdot \mathbf{E}.$

Or, par définition, $\mathbf{j} = n_s \cdot e \cdot \mathbf{v}_s$, on en déduit, en confondant la dérivée locale et la dérivée eulérienne, $\mathbf{E} = \frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$, d'où : $\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}.$ A.N. : $\lambda = 13 \text{ nm}.$

Étude dimensionnelle : On sait que les courants de déplacement et les courants vrais ont même dimension, donc, en notant $[X]$ la dimension de la grandeur X :

$$[\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}] = [\mathbf{j}] \text{ donne } [\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \lambda^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}] = [\lambda^2 \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}] = [\mathbf{E}] \text{ puis } [\frac{\lambda^2}{c^2 T^2}] = 1. \text{ Finalement, } [\lambda^2] = L^2.$$

2. On a : $\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\mu_0 \cdot \mathbf{j})]$ et $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}$ car on est en régime quasi – stationnaire.

En prenant le rotationnel : $\text{rot}[\text{rot} \mathbf{B}] = \text{rot}(\mu_0 \cdot \mathbf{j})$ et en l'injectant dans $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\mu_0 \cdot \mathbf{j})]$,

on en déduit : $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\text{rot} \mathbf{B})]$ et finalement : $\frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\text{rot} \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2}] = \mathbf{0}.$

3. Du fait que $\text{div} \mathbf{B} = 0$, $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B}$ d'où $\Delta \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} = \mathbf{0}$ qui est l'équation proposée.

4. Dans les conditions de l'énoncé, $\Delta \mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{B}}{dy^2} \mathbf{u}_z$ l'équation de London donne : $\frac{d^2 \mathbf{B}}{dy^2} - \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} = \mathbf{0}.$

Les solutions générales sont de la forme : $B(y) = a \cdot \text{ch}\left(\frac{y}{\lambda}\right) + b \cdot \text{sh}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$ avec a et b deux constantes d'intégration.

5. En absence de courants surfaciques au sens strict, le champ magnétique est donc **continu** aux surfaces de la couche supraconductrice : $B(y = \pm d) = B_0.$

Ces conditions aux limites donnent finalement : $\mathbf{B}(y) = B_0 \frac{\text{ch}\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \mathbf{u}_z.$

$B(y)$ s'annule sur une épaisseur de l'ordre de $\lambda.$

Au voisinage de $y = d$, si d et y sont très supérieurs à λ ,

on a $\text{ch}\left(\frac{y}{\lambda}\right) \approx \exp\left(\frac{y}{\lambda}\right)$ et $\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right) \approx \exp\left(\frac{d}{\lambda}\right)$; il serait plus judicieux de paramétrer en

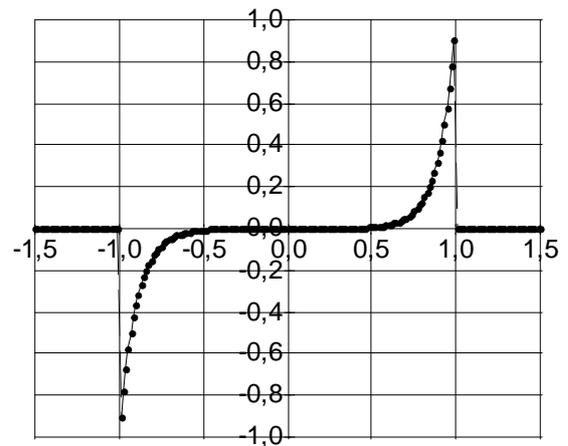
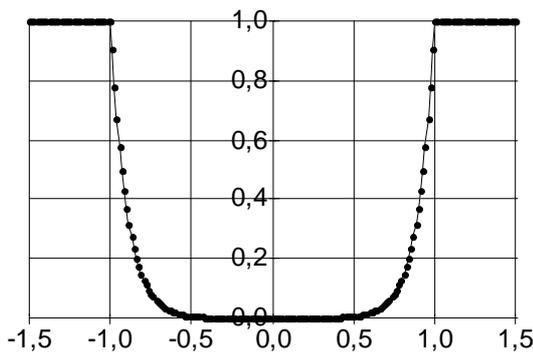
fonction de la profondeur $\xi = d - y$, et alors : $B(\xi) = B_0 \frac{\text{ch}\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \approx B_0 \cdot \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda}\right)$, qui montre

bien que λ est la profondeur caractéristique de pénétration de **B**.

6. $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}$ donne $\frac{dB}{dy} \mathbf{u}_x = \mu_0 \cdot \mathbf{j}$ et on en tire :

$$\mathbf{j}(y) = \frac{B_0}{\mu_0 \cdot \lambda} \frac{\text{sh}\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \mathbf{u}_x.$$

Là encore, on constate que les courants n'existent que dans une couche d'épaisseur λ sous la surface.



$\frac{B(y)}{B_0}$ en fonction de $\frac{y}{d}$ pour $d = 10 \lambda$

$\frac{j(y)}{j_{\max}}$ en fonction de $\frac{y}{d}$ pour $d = 10 \lambda$