Corrigé de la planche n° 13

IN 001

1°) • longueur de fil bobiné : $2(a+b)n$.
masse correspondante : $m = \pi\frac{d^2}{4}\rho\ 2n(a+b)$

$\Rightarrow \boxed{m = \pi\frac{d^2}{2}\rho n(a+b)}$.

• moment d'inertie :

$J = J(DE) + 2J(AE)$

$J(AE) = \frac{1}{3}m_{AE}a^2$ avec $m_{AE} = \pi\frac{d^2}{4}\rho n a$.

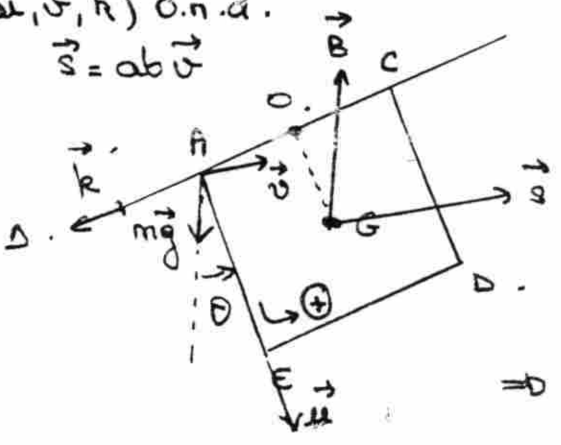
$J_{DE} = m_{DE}a^2$ avec $m_{DE} = \pi\frac{d^2}{4}\rho n b$.

$\Rightarrow \boxed{J = \pi\frac{d^2}{4}\rho n a^2\left(\frac{2a}{3}+b\right)}$.

2°) Système : le cadre de masse m.
Référentiel : terrestre galiléen
Forces : - poids en G.
- force de Laplace due au courant induit
sur $\vec{dl}$: $\vec{dF_e} = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$
- réaction sur l'axe dont le moment sur Δ est nul (pas de frottements).

Equation électrique : mvt d'un circuit dans $\vec{B}$ permanent
$\vec{E_m} = \vec{v}\wedge\vec{B}$ et e fem induite $= -\frac{d\phi}{dt}$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ o.n.d.
$\vec{S} = ab\vec{v}$



$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = nabB\sin\theta$
vue l'orientation du circuit

alors : $\boxed{e = -nabB\cos\theta\frac{d\theta}{dt}}$

$\Rightarrow$ courant induit $i = \frac{e}{R} = -\frac{nabB}{R}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$

Equation mécanique : th. du moment cinétique au cadre en un point O / OG ⊥ Δ :

$$\frac{d\sigma_o}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{\Gamma}(\text{Laplace}).$$

Le torseur des forces de Laplace est un couple ($\vec{B}$ permanent) de moment $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{\mathcal{M}} = ni\vec{S}$ moment magnétique du circuit

En projection sur Δ : on a

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = J\ddot{\theta} = \frac{mga}{2}\left[\vec{u} \wedge (\quad \cos\theta\,\vec{u} - \quad \sin\theta\,\vec{v})\right] \cdot \vec{k} + i(\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow J\ddot{\theta} = -\frac{mga}{2}\sin\theta + Biabn\left(\vec{v} \wedge (-\cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{v})\right) \cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow J\ddot{\theta} = -\frac{mga}{2}\sin\theta + abniB\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} = -\frac{mga}{2}\sin\theta - \frac{a^2b^2n^2B^2}{R}\cos^2\theta\,\dot{\theta}}$$

Pour θ petit : $\sin\theta \# \theta \quad \cos\theta \# 1$

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} + \frac{a^2b^2n^2B^2}{R}\dot{\theta} + \frac{mga}{2}\theta = 0}$$

<u>equation d'un oscillateur amorti par frottement fluide</u>

3°) Il y a des oscillations si régime pseudopériodique

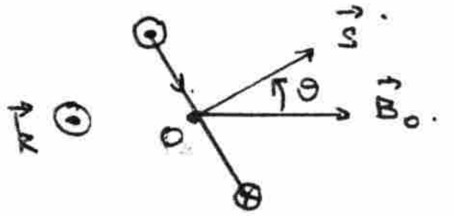
$\Rightarrow$ Δ de l'éq. caratéristique < 0.

$$Jx^2 + \frac{a^2b^2n^2B^2}{R}x + \frac{mga}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow \Delta = \left[\frac{a^2b^2n^2B^2}{R}\right]^2 - 2Jmga < 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{B < \frac{\sqrt{R}\,(2Jmga)^{1/4}}{nab.}}$$

IN 002 vue de dessus :



θ angle que fait (ABCD) avec $\vec{B}_o$.

$\theta + \frac{\pi}{2}$ angle que fait $(\overset{\frown}{A'B'C'D'})$ avec $\vec{B}_o$

- Spire ABCD : mvt dans $\vec{B}$ permanent → fem induite ($\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$) . $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

Soit. $\Phi = BS\cos\theta \Rightarrow \underline{e = -BS\dot{\theta}\sin\theta}$.

→ courant induit $\underline{i = -\frac{BS}{r}\dot{\theta}\sin\theta}$.

- Spire A'B'C'D' courant induit $i' = -\frac{BS}{r}\dot{\theta}\cos\theta$

Les spires sont alors soumises au couple de Laplace de moment $\vec{\Gamma} = i\vec{S} \wedge \vec{B}_0$. ($\vec{B}_0$ uniforme).
$\vec{\Gamma}' = i'\vec{S}' \wedge \vec{B}_0$

$\vec{\Gamma} = -iSB_0\sin\theta\,\vec{k}$
$\vec{\Gamma}' = -i'SB_0\cos\theta\,\vec{k}$. $\Rightarrow \vec{\Gamma}_{tot} = -\frac{B_0^2S^2}{r}\dot{\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\vec{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma}_{tot} = -\frac{B_0^2S^2}{r}\dot{\theta}\vec{k}}$$

- Evolution du système : équation mécanique

$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{f}_{ext})$

- système : les 2 cadres (solide)
- forces : - poids (moment nul
  - force de Laplace $\vec{\Gamma}_{tot}$
  - actions sur l'axe (sans frottement)

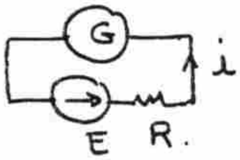
en projection sur Δ :

$$\boxed{J\ddot{\theta} = -\frac{B_0^2S^2}{r}\dot{\theta}}$$

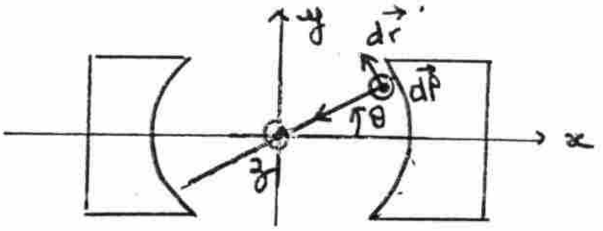
en posant $\boxed{\tau = \frac{Jr}{B_0^2S^2}}$ on a : $\boxed{\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}.}$

IN 003 . Galvanomètre

1°)



2) Mvt du cadre (conducteur filiforme) dans $\vec{B}$ permanent :
fem induite $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

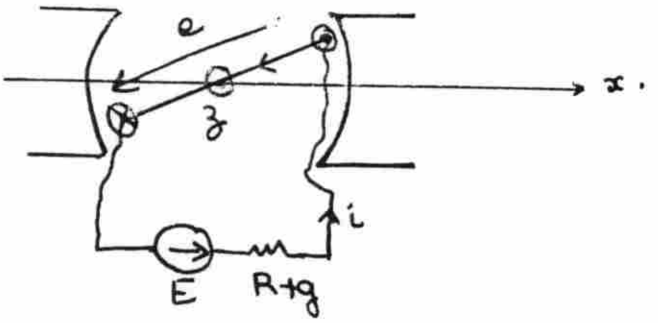


flux coupé de $\vec{B}$ lors d'une rotation de dθ :

$$d\Phi_c = N\vec{B}\cdot(\vec{dr}\wedge\vec{dl}) = + NabB\,d\theta = d\Phi \quad \text{car } \vec{B} \text{ permanent}$$

$$\Rightarrow \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} = -NSB\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = -\Phi_0\dot{\theta}}$$

<u>équation électrique</u> :



$$E - (R+g)i + e = 0.$$

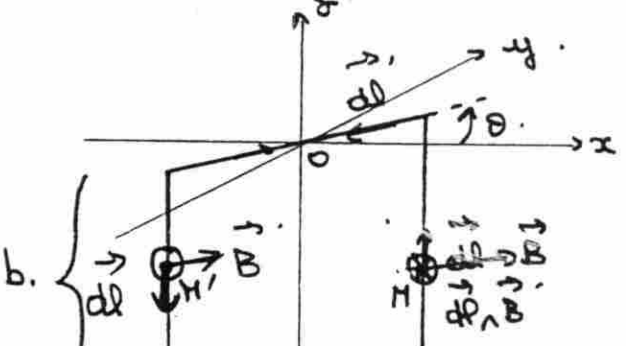
$$\Rightarrow \quad i = \frac{E - \Phi_0\dot{\theta}}{R+g}.$$

ⓑ <u>Equation mécanique</u> :

rotation / Oz : $\sigma_{oz} = J\dot{\theta}$

- <u>forces</u> : force de rappel de couple $C\theta\,\vec{u}_z$

force de Laplace $\vec{dF} = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$



- <u>sur les côtés horizontaux</u> :

$\vec{dl} \parallel \vec{B}$ radial

$\Rightarrow \vec{dF}_\ell = \vec{0}$.

- <u>sur les côtés verticaux</u> ;

$\vec{dl}\wedge\vec{B} \neq \vec{0}$ fait tourner le cadre

moment en O de ces forces :

$$d\vec{\Gamma}_o = Ni\left[-(\vec{u}_z\wedge\vec{B})\wedge\vec{OM} - \vec{OM'}\wedge(\vec{u}_z\wedge\vec{B})\right].$$

$$= Ni\left[\vec{OM}\wedge(\vec{u}_z\wedge\vec{B}) - \vec{OM'}\wedge(\vec{u}_z - \vec{B})\right]$$

$$\Rightarrow \Gamma_z = 2\left(i\frac{ab}{2}N\right)B \quad \Rightarrow \quad \Gamma_z = \underbrace{abNB}_{\Phi_0}\,\frac{E - \Phi_0\dot{\theta}}{R+g}. = i\Phi_0.$$

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} + C\theta = i\Phi_0}$$

ⓒ Le galvanomètre transforme un courant en rotation du cadre → <u>transducteur électromécanique</u>

<u>Bilan énergétique</u> :

$$E - (R+g)i + e = 0.$$

$$Ei - (R+g)i^2 = -ei = \phi_0 \dot{\theta} i$$

et

$$J\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{\phi_0^2}{R+g}\dot{\theta}^2 + C\theta\dot{\theta} = \frac{\phi_0 E}{R+g}\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}C\theta^2\right) = \phi_0 \frac{E+e}{R+g}\dot{\theta} = i\phi_0\dot{\theta}$$

soit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2\right) = -ei = Ei - (R+g)i^2.$

soit : $Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2\right) + (R+g)i^2.$

puissance fournie par le circuit extérieur

variation d'Ec par unité de temps

variation d'Ep élastique par unité de temps

puissance dissipée par effet Joule.

2°) $$J\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\phi_0^2}{R+g}}\dot{\theta} + C\theta = \frac{\phi_0 E}{R+g}.$$

analogie frott^t fluide → loi de Lenz.
(moment $\Gamma = -\lambda\dot{\theta}$ $\lambda = cte > 0$)

3°) <u>Equation caractéristique</u> :

$$Jx^2 + \frac{\phi_0^2}{R+g}x + C = 0.$$

$$\Delta = \left(\frac{\phi_0^2}{R+g}\right)^2 - 4CJ$$

- si $\Delta > 0$: cad si $R < \frac{\phi_0^2}{2\sqrt{JC}} - g$ alors aucune oscillation → <u>régime apériodique</u>
- si $\Delta < 0$: cad si $R > R_c = \frac{\phi_0^2}{2\sqrt{JC}} - g$ → <u>régime pseudo-sinusoïdal amorti.</u>
- si $\Delta = 0$: cad si $R = R_c$ → <u>régime critique</u>

$$\boxed{R'_c = R_c + g = \frac{\phi_0^2}{2\sqrt{Jc}}}$$

Utilisation pratique du galva : $R = R_c$.

c'est là que θ atteint le plus rapidement la valeur en régime permanent : $\theta_0 = \frac{I\phi_0}{c}$.

4°) $\cdot\ R_c = \frac{\phi_0^2}{2\sqrt{Jc}} - g = 485\,\Omega. \Rightarrow \frac{\phi_0^2}{\sqrt{Jc}} = 10^3(\Omega) = 2R'_c$

$$\frac{\phi_0}{c} = \frac{\theta_0}{I} = 10^{-6}A \Rightarrow c = \frac{\phi_0 I}{\theta_0}.$$

période : T_0 en circuit ouvert : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}$

$$\Rightarrow \frac{J}{c} = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow J = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \times \frac{I}{\theta_0}\phi_0.$$

alors : $\phi_0^2 = 2R'_c \frac{T_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{I}{\theta_0}}\sqrt{\phi_0} \cdot \sqrt{\frac{I}{\theta_0}}\sqrt{\phi_0} = \frac{2R'_c I}{\theta_0}\frac{T_0}{2\pi}\phi_0.$

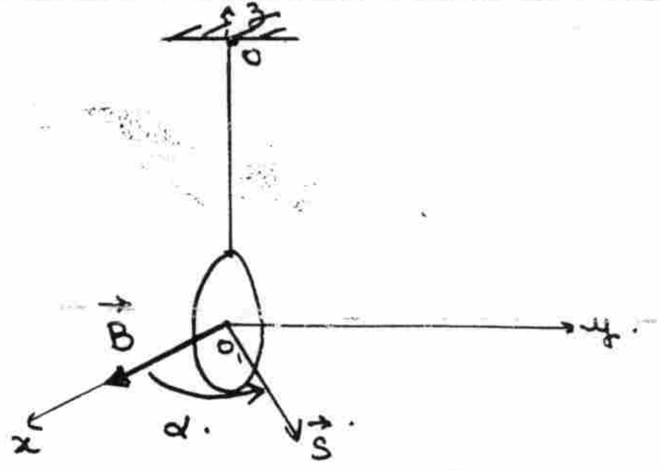
$\Rightarrow \boxed{B = \frac{R'_c I T_0}{\pi\theta_0} \cdot \frac{1}{NS}}$ $\Rightarrow B = \frac{\phi_0}{NS}$

soit $B = 83{,}3\ mT$

alors : $\boxed{C = \frac{R'_c I^2 T_0}{\pi\theta_0^2}}$ $\Rightarrow C = 5{,}4.10^{-6}\ N.m.rad^{-1}$

$J = \frac{I^2 T_0^3 R'_c}{4\pi^3\theta_0^2}$ $J = 1{,}25.10^{-6}\ kg.m^2$

IN 004



1°) Mvt de la spire dans $\vec B$ permanent et uniforme :

$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ champ électromoteur induit

$e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \vec{B}.\vec{S} = BS\cos\alpha$

et $e = +BS \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}$

alors i induit : $i = \frac{e}{R} = \frac{BS}{R}\dot{\alpha}\sin\alpha$.

<u>Equation mécanique</u> : $\Sigma \vec{\mathcal{M}}_{\Delta} = J\ddot{\alpha}$ (système : la spire).

- <u>forces</u> : poids $\vec{\mathcal{M}}_{\Delta}(\vec{P}) = \vec{0}$
  tension du fil : $\vec{\mathcal{M}}_{\Delta}(\vec{T}) = \vec{0}$
  force de Laplace : $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B} = -BSi\sin\alpha\,\vec{u}_z$
- <u>équation</u> : $(\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) = J\ddot{\alpha}\,\vec{u}_z$

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\alpha} = -\frac{B^2S^2}{R}\dot{\alpha}\sin^2\alpha}$$

soit : $\ddot{\alpha} = -\frac{B^2\pi^2a^4}{R}\frac{2}{Ma^2}\dot{\alpha}\sin^2\alpha. = -\frac{B^2\pi^2a^2}{MR}\dot{\alpha}(1-\cos 2\alpha)$.

on intègre par rapport à t :

$$\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(0) = -\frac{B^2\pi^2a^2}{MR}\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 - \frac{B^2\pi^2a^2}{MR}\left[\alpha(t) - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]}$$

Lorsque la spire s'arrête : $\dot{\alpha} = 0$. alors α_f vérifie

$$\boxed{\alpha_f - \frac{1}{2}\sin 2\alpha_f = \frac{\dot{\alpha}_0 MR}{B^2\pi^2a^2}}$$

3°) $u = 2\alpha_f$ vérifie $u - \sin u = \frac{2\dot{\alpha}_0 MR}{B^2\pi^2a^2}$

la fonction $u - \sin u$ est croissante car si $f(u) = u - \sin u$
et $f'(u) = 1 - \cos u \geq 0$.
donc monotone et donc ∃ une seule valeur de u correspondant à $f(u) = \frac{2\dot{\alpha}_0 MR}{B^2\pi^2a^2}$.

<u>Pour $\alpha_f = \frac{\pi}{2}$</u> : $\frac{\dot{\alpha}_0 MR}{B^2\pi^2a^2} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{2\dot{\alpha}_0 MR}{\pi^3a^2}}}$ <u>$B = 0{,}11\ T$</u>

4°) <u>Puissance dissipée par effet Joule</u> :

$$\mathcal{P}_J = Ri^2 = B^2S^2R\,\dot\alpha^2\sin^2\alpha \,.$$

$$W_J = \int_0^{t_f} Ri^2\,dt = B^2S^2R\int_0^{t_f}\dot\alpha^2\sin^2\alpha\,dt \,.$$

or $\dot\alpha\sin^2\alpha = -\dfrac{MR}{2B^2\pi^2a^2}$ d'où $W_J = -\dfrac{B^2\pi^2a^4R}{2B^2\pi^2a^2}\,MR\displaystyle\int_0^{t_f}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)dt$

soit : $W_J = -\dfrac{\cancel{B^2}\cancel{\pi^2}\cancel{a^4}MR^2}{2\cancel{B^2}\cancel{\pi^2}a^2}\,dy = \boxed{-\dfrac{MR^2}{2a^2}\dfrac{\pi}{2}.}$

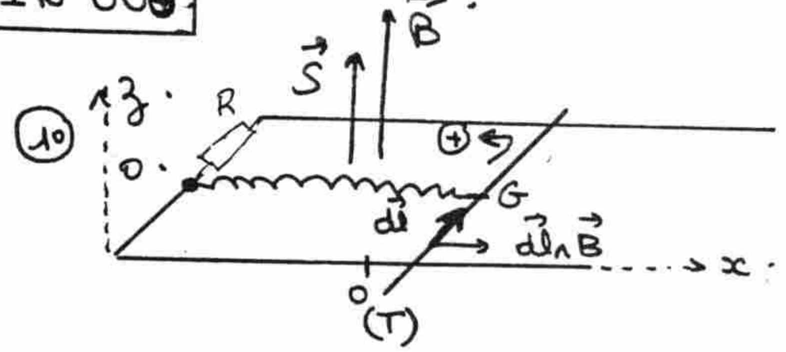
$$Re = Ri^2 = BS\dot\alpha\sin\alpha\, i$$

et $J\ddot\alpha\dot\alpha = -BSi\dot\alpha\sin\alpha \,.$

$$\Rightarrow J\dot\alpha\ddot\alpha = -Ri^2 \Rightarrow \boxed{-Ri^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot\alpha^2\right).}$$

la puissance perdue par effet Joule est la variation d'énergie cinétique de rotation.

⑩



ⓐ on prend comme origine des x la position de la tige pour que le ressort soit non tendu (soit OG = l_0 longueur à vide du ressort).

<u>système</u>: la tige

<u>équation électrique</u>: mvt dans $\vec{B}$ permanent → fem induite $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = \vec{B}.\vec{S}$

$\vec{S}.\vec{B} = B\,(x_0+x)\,\ell$ d'où : $\boxed{e = -B\ell v = -B\ell\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}$

⇒ i parcourant la tige : $\boxed{i = \dfrac{e}{R'} = -\dfrac{B\ell}{R'}\dot{x}}$

avec $R' = R+r$.

<u>équation mécanique</u> :

<u>forces</u> : - poids + réaction des rails : $\vec{P}+\vec{R}=0$ (en proj sur $\vec{z}$).

- force de Laplace : $d\vec{F}_e = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$.

$i\,\vec{dl}\wedge\vec{B} = iBdl\,\vec{u}_x$ ⇒ $\vec{F}_e = iB\ell\,\vec{u}_x$.

- force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -kx\,\vec{u}_x$

th. de la résultante cinétique à la tige :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = +iB\ell - kx = -\frac{B^2\ell^2}{R'}\dot{x} - kx.$$

soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR'}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0.}$

<u>oscillateur amorti par frott' fluide</u>

ⓑ Retour le plus rapide à $x=0$ pour Δ de l'éq. caract. $=0$ (cas critique).

Alors : $\left(\dfrac{B^2\ell^2}{mR'}\right)^2 - 4\dfrac{k}{m} = 0$ ⇒ $\boxed{R = \dfrac{B^2\ell^2}{2m\omega_0} - r \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}.}$

Alors mvt apériodique critique :

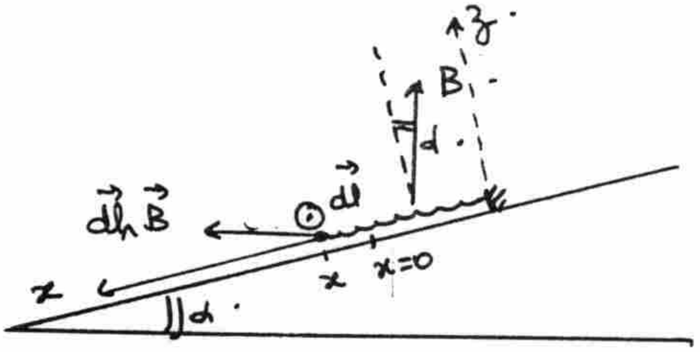
$$x(t) = (A+Bt)\,e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

à t=0 : $x(0) = a = A$

$$\dot x(0) = 0 = B - \frac{A}{\tau}. \quad \Rightarrow \quad B = \frac{a}{\tau}.$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = a\left(1+\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}}$$

2°



Aux forces précédentes, il faut rajouter la composante du poids selon x et changer la force de Laplace :

- B devient B cos α pour le calcul de φ
- $(\vec{dl}\wedge\vec{B})\cdot\vec{u_x} = B\,dl\cos\alpha$.

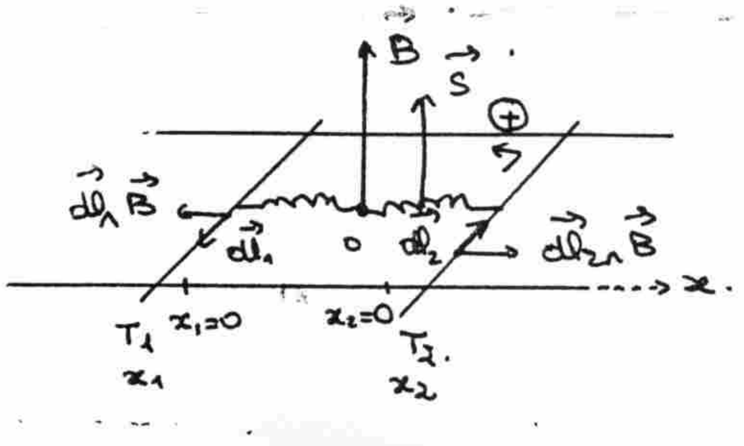
D'où $e = -Bl\cos\alpha\,\dot x$ et $i = -\frac{Bl}{R'}\cos\alpha\,\dot x$

enfin : $m\ddot x = -\frac{B^2l^2}{R'}\cos^2\alpha\,\dot x - kx$.

$$\Rightarrow \boxed{\ddot x + \frac{B^2l^2}{mR'}\cos^2\alpha\,\dot x + \frac{k}{m}x = 0.}$$

Régime critique : $\boxed{R'_0 = \frac{B^2l^2\cos^2\alpha}{2m\omega_0} - r}$

3°



x_1 et x_2 pris / à la position à vide des 2 ressorts.

- <u>équation électrique</u> : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

$$\phi = B\ell(x_2-x_1) \Rightarrow e = -B\ell(v_2-v_1) = -B\ell(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \Rightarrow i = -\frac{B\ell}{2R_1}(\dot{x}_2-$$

- <u>équations mécaniques</u> :

pour (T_1) : - forces : . $\vec{P}+\vec{R}_1$ se compensent

. $d\vec{F}_{1\ell} = i\,\vec{dl}_1 \wedge \vec{B}$ $\quad \vec{dl}_1 \wedge \vec{B} = -B\,dl\,\vec{u}_x$

. force de rappel du ressort $\vec{F}_{r_1} = -kx_1\,\vec{u}_x$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 = -kx_1 - iB\ell = -kx_1 + \frac{B^2\ell^2}{2R_1}(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \quad (1)$$

pour (T_2) : forces . $\vec{P}+\vec{R}_2$ se compensent

. $d\vec{F}_{2\ell} = i\,\vec{dl}_2 \wedge \vec{B} = iB\,dl\,\vec{u}_x$

. force de rappel du ressort $\vec{F}_{r_2} = -kx_2\,\vec{u}_x$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_2 = -kx_2 - \frac{B^2\ell^2}{2R_1}(\dot{x}_2-\dot{x}_1). \quad (2).$$

$$(1)+(2) \Rightarrow m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) + k(x_1+x_2) = 0.$$

si $X = x_1+x_2$ on a $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

soit $X = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

à $t=0$: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0 = a = A\cos\varphi \quad \begin{rcases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{rcases} \Rightarrow \dot{X}_0 = 0 = -A\omega\sin\varphi.$

$\Rightarrow \varphi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_1+x_2 = a\cos\omega_0 t}.$$

$(1)-(2) \Rightarrow m\ddot{Y} + \dfrac{B^2\ell^2}{2R_1}\dot{Y} + kY = 0$ avec $Y = x_1 - x_2$.

si $R_1 > \dfrac{B^2\ell^2}{2\sqrt{km}}$ alors : $\Delta = \left(\dfrac{B^2\ell^2}{2R_1}\right)^2 - 4km < 0$.

D'où : solutions de l'éq. caractéristique :

$$-\frac{B^2\ell^2}{2mR_1} \pm \frac{1}{2m} i\sqrt{4km - \left(\frac{B^2\ell^2}{2R_1}\right)^2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega$$

avec $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{B^2\ell^2}{4mR_1}\right)^2}$

D'où $Y(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right]$.

à $t=0$: $Y = a = A$

$\dot{Y} = 0 = -\frac{1}{\tau}A + B\Omega \Rightarrow B = \frac{a}{\Omega\tau}$.

$\Rightarrow x_1 - x_2 = a e^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\Omega t\right)$.

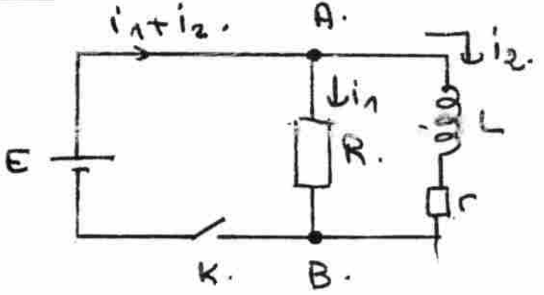
ce qui donne:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}\left[\cos\omega_0 t + e^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\Omega t\right)\right].$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2}\left[\cos\omega_0 t - e^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\Omega t\right)\right].$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad 1/\tau = \frac{B^2\ell^2}{2mR_1}$ $\quad$ et $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{B^2\ell^2}{4mR_1}\right)^2}$

IN 007



⑩ Fermeture de K: variation de $i(t)$ dans L

$\Rightarrow$ fem induite car variation de $\vec{B}$ créé par la bobine dans le circuit lui-même.

$e = -L\frac{di_2}{dt}$ fem induite

D'où $Y(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right]$.

à $t=0$: $Y = a = A$

$$\dot{Y} = 0 = -\frac{1}{\tau}A + B\Omega \Rightarrow B = \frac{a}{\Omega\tau}.$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = a e^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\Omega t\right).$$

ce qui donne:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}\left[\cos\omega_0 t + e^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\Omega t\right)\right].$$

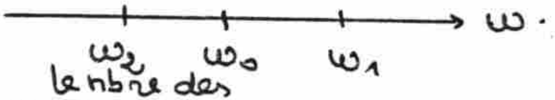
$$x_2(t) = \frac{a}{2}\left[\cos\omega_0 t - e^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\Omega t\right)\right].$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad 1/\tau = \frac{B^2\ell^2}{2mR_1}$ $\quad$ et $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{B^2\ell^2}{4mR_1}\right)^2}$

$$\Rightarrow \quad q_1(t) = \frac{Q_0}{2}\left[\cos\omega_2 t + \cos\omega_1 t\right].$$

$$q_2(t) = \frac{Q_0}{2}\left[-\cos\omega_2 t + \cos\omega_1 t\right].$$

si $M>0$ on a :



Le couplage double le nbre des fréquences propres et les écarte de la fréquence propre des systèmes non couplés.

IN 008

① $\Phi_{1\to2} = \iint_{S_2} \vec{B_1}\cdot\vec{dS}$.

(S_2) s'appuie sur Oz et est un $\frac{1}{2}$plan allant $\to\infty$ (C_2 fermé à l'∞).

$$\Phi_{1\to2} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\frac{dr\,2a}{r} \Rightarrow \boxed{\Phi_{1\to2} = \frac{\mu_0 N I a}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}}$$

$$\Phi_{2\to1} = \iint_{S_1}\vec{B_2}\cdot\vec{dS} = N\iint_{spire}\vec{B_2}\cdot\vec{dS} = N\frac{\mu_0 I'}{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\frac{2a\,dr}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{2\to1} = \frac{\mu_0 N I'\cdot 2a}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}}$$

② $\Phi_{1\to2} = M_{1\to2}\, I \qquad \Phi_{2\to1} = M_{2\to1}\, I'$

on a bien $\boxed{M_{1\to2} = M_{2\to1} = M = \frac{\mu_0 N\ a}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}}$

③

ⓐ $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_{2\to1}}{dt}$ si on néglige la self du bobinage

$$e = -M\frac{dI'}{dt} \Rightarrow \boxed{e = M I_0\omega\sin\omega t} \quad \text{d'où} \quad \boxed{e_0 = M I_0\,\omega}$$

ⓑ La mesure de e_0 permet d'atteindre I_0 → ampèremètre

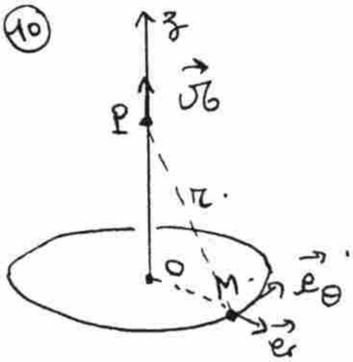
ⓒ $e_0 = M\omega\ I_0 \Rightarrow \boxed{I_{min} = \frac{e_{min}}{M\omega}\ \#\ 10^{-4}A}$

$N = 500$ spires
$a = 10$ cm
$b = 20$ cm
$\omega = 100\pi\ s^{-1}$

$M = 22\ \mu H$ très faible.

si on rajoute noyau en ferrite : $\mu = \mu_0\mu_r\ \#\ 1000\,\mu_0$ $\Big\}\Rightarrow M' = 22\,mH$ $\uparrow$

(1°)



$\vec{\mathcal{M}}$ varie dans le temps ⇒ $\vec{A}$ et $\vec{B}$ créés par $\vec{\mathcal{M}}$ aussi : cas d'induction de Neumann : $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Mais comme le cerceau est isolant, il n'y a aucun courant induit qui circule.

En revanche, le cerceau chargé est soumis aux forces électriques dues à $\vec{E}_m$ qui est ⊥ à $\vec{e}_z$ et $\vec{r}$ donc qui tend à faire tourner le cerceau.

(2°) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$. $\quad \vec{E}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathcal{M}}{dt} \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{r}}{r^3}$

$\vec{r} = \vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$

$\vec{E}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{d\mathcal{M}}{dt}\right) \frac{\vec{e}_\theta}{r^2} \qquad \mathcal{M} = i(t)\,\pi\rho^2$

$\Rightarrow \vec{E}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \pi\rho^2 \left(\frac{di}{dt}\right) \frac{\vec{e}_\theta}{r^2}$

Force exercée sur un élt dl : $\vec{dF} = \frac{-q}{2\pi a} dl \frac{\mu_0 \rho^2}{4} \left(\frac{di}{dt}\right) \frac{\vec{e}_\theta}{a^2}$

$\frac{di}{dt} = \frac{I}{\tau}$. $\Rightarrow \vec{dF} = -\frac{qI\mu_0\rho^2}{4\pi a^3 \tau} \vec{e}_\theta \, dl$.

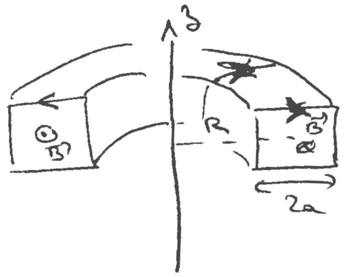
Moment en O de cette force : $\vec{\Gamma} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{OM} \wedge \vec{dF} = -\frac{qI\mu_0\rho^2}{2\times 4\pi a^3 \tau} a . 2\pi a \vec{u}_z$

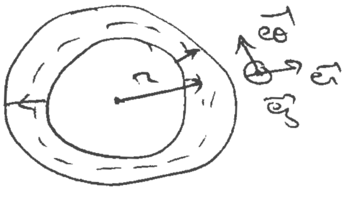
$\Rightarrow \vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0 q I \rho^2}{4 a \tau} \vec{u}_z$

$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Gamma}{J} = -\frac{\mu_0 q I \rho^2}{4 m a^3 \tau} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = -\frac{\mu_0 q I \rho^2}{4 m a^3 \tau} t}$

$0 < t < \tau$.

7. Transformateur :



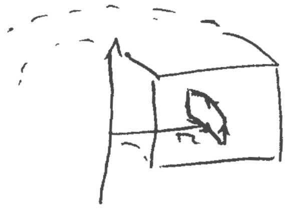


1. On a $\Phi_{11} = L_1 I_1$ avec $\Phi_{11} = \iint_{(C_1)} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_1}$

Calcul de B_1 par un tore à N_1 spires jointives : on s'inspire du solénoïde ∞.

symétries $\vec{B} = B(r,\theta,z)\vec{e_\theta}$ $(\vec{e_r},\vec{e_z})$ plan de symétrie

invariances $\vec{B} = B(r,z)\vec{e_\theta}$ (invariance par rotation autour de z)

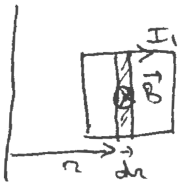


prenons un contour rectangulaire mais à r=cte (donc arrondi autour de z) : $B(r_1,z_1)\ell + 0 - B(r,z_2)\ell + 0 = 0$

$\Rightarrow B(r,z) = B(r)$

Puis appliquons Ampère sur un cercle de rayon r et d'axe z : on montre facilement qu'en dehors du tore $\vec{B} = \vec{0}$.

Dans le tore : $\oint \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 N_1 I_1 \Rightarrow B(r).2\pi r = \mu_0 N_1 I_1 \Rightarrow \vec{B_1} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r}\vec{e_\theta}$



$$\Phi_{11} = \int_{R-a}^{R+a} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r}\vec{e_\theta} \cdot \underbrace{2a\,dr\,\vec{e_\theta}}_{\vec{dS}} \cdot \underbrace{N_1}_{}$$

N_1 spires sur (C_1) donc flux × N_1

$$= \frac{\mu_0 N_1^2 a I_1}{\pi} \ln\frac{R+a}{R-a}$$

Alors $L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 a}{\pi}\ln\frac{R+a}{R-a}$. De même $L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a}{\pi}\ln\frac{R+a}{R-a}$

2. Pour la mutuelle M : $\Phi_{21} = M I_2 = \iint \vec{B_2}\cdot\vec{dS_1}$

ou $\Phi_{12} = M I_1 = \iint \vec{B_1}\cdot\vec{dS_2}$

ici $\vec{B_2} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi r}\vec{e_\theta}$ car les 2 enroulements sont quasi confondus.

$$\Phi_{21} = \int_{R-a}^{R+a} \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi r}.\vec{e_\theta}.2a\,dr\,\vec{e_\theta}.\underbrace{N_1}_{} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2 a}{\pi}\ln\frac{R+a}{R-a}$$

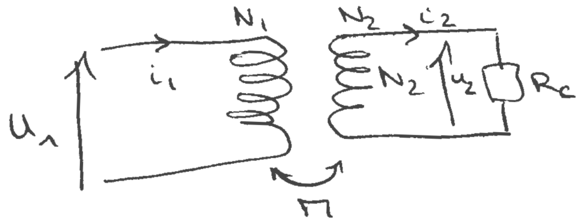
car N_1 spires sur (C_1)

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a}{\pi}\ln\frac{R+a}{R-a}$$

Rq : si I_2 n'est pas dans le m̂ sens que I_1, $\vec{B_2} = -\frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi r}\vec{e_\theta}$

et $M' = -M$

3.



Circuit 1 (primaire)

$u_1 + e_1 = \underset{\underset{\text{ici}}{0}}{\underset{\shortparallel}{R_1}}\, i_1$

or $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \underline{u_1} = jL_1\omega \underline{I_1} + jM\omega \underline{I_2}$ (1)

car on est en sinusoïdal ici

Circuit 2 (secondaire)

$u_2 + e_2 = (\underset{\underset{\text{ici}}{0}}{\underset{\shortparallel}{R_2}} + R_c)\, i_2 \Rightarrow \underline{u_2} = jL_2\omega \underline{I_2} + jM\omega \underline{I_1} + R_c \underline{I_2}$ (2)

ⓐ circuit ouvert : $\underline{I_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\underline{u_1} = jL_1\omega \underline{I_1}$

$\underline{u_2} = jM\omega \underline{I_1} = \frac{M}{L}\underline{u_1}$

or $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\pi} a \ln\frac{R+a}{R-a}$ et $L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 a}{\pi}\ln\frac{R+a}{R-a}$

donc $\underline{u_2} = \frac{N_2}{N_1}\underline{u_1}$ et $\frac{N_2}{N_1} = \frac{u_2}{u_1}$ transformateur de tension.

ⓑ circuit court-circuité : $\underline{R_c = 0} \Rightarrow \underline{u_2} = 0$

donc (2) $jL_2\omega \underline{I_2} + jM\omega \underline{I_1} = 0 \Rightarrow \underline{I_2} = -\frac{M}{L_2}\underline{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}\underline{I_1}$ transformateur de courant

ⓒ à l'aide de la photo : $2a \simeq 2\,\text{cm}$

le rayon intérieur du tore vaut $\simeq 3{,}2\,\text{cm}/2 = 1{,}6\,\text{cm}$ et $R \simeq 2{,}6\,\text{cm}$

Si les spires sont jointives sur le coeur : $N_2 \simeq \frac{2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-4}} \simeq 200$ spires

si le diamètre du fil est de 0,5 mm

Si les spires du primaire sont bobinées à l'intérieur du secondaire

le rayon intérieur est de $1{,}6 - 0{,}05 \simeq 1{,}55\,\text{cm}$

donc $N_1 \simeq \frac{2\pi \cdot 1{,}55 \cdot 10^{-2}}{5\, 10^{-4}} = 195$ spires

Alors $L_1 = \frac{4\cancel{\pi}10^{-7}}{\cancel{\pi}}(195)^2 \cdot (10^{-2}) \ln\frac{3{,}6}{1{,}6} = 5{,}35 \cdot 10^{-5}\,\text{H}$

$L_2 = 5{,}63 \cdot 10^{-5}\,\text{H}$

$M = 5{,}48 \cdot 10^{-5}\,\text{H}$