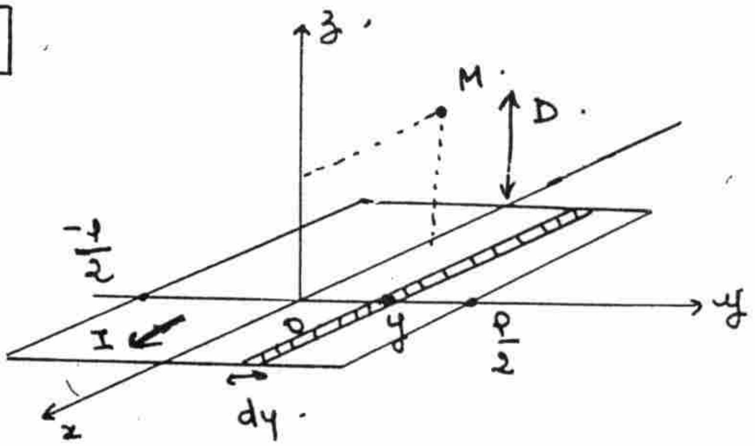
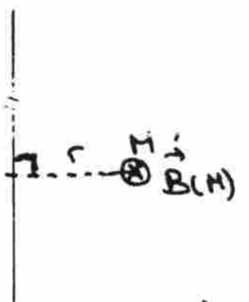
Corrigé planche n°11.

MS 101



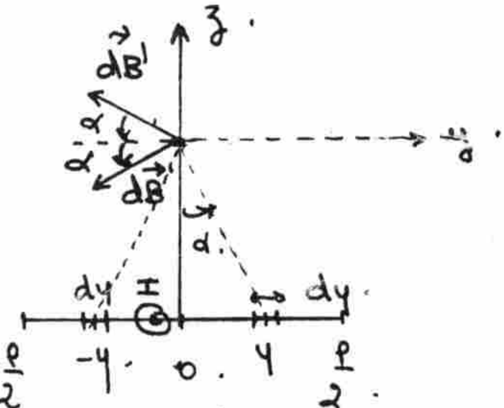
on découpe la lame en bandes très fines d'épaisseur $dy \ll l$. assimilées à des conducteurs filiformes portant le courant $dI = I\frac{dy}{l}$. La distance de cette bande au point M vaut $r = \sqrt{D^2+y^2}$

or : champ créé par un fil infini parcouru par un courant I



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta.$$

vue de profil :



$\vec{dB}$ crée par dy en y.
$\vec{dB'}$ crée par dy en −y.

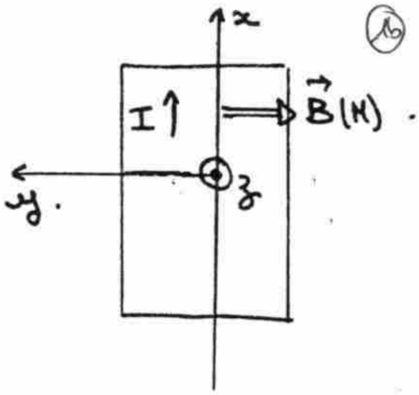
$$|\vec{dB'}| = |\vec{dB}| = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\sqrt{y^2+D^2}}$$ $\vec{dB}+\vec{dB'}$ // à Oz par symétrie

il suffit donc de calculer la composante de $\vec{B}(M)$ sur Oz puisque par symétrie $\vec{B}(M)$ // Oz.

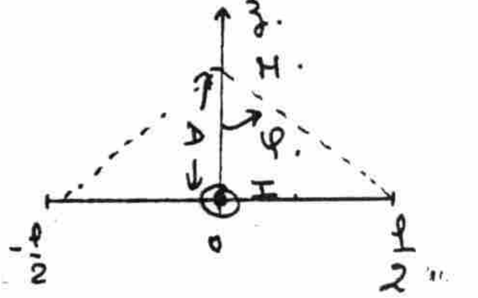
$$\vec{B} = \int_{-l/2}^{l/2}\vec{dB} \Rightarrow \vec{B}.\vec{u}_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{l/2} -\frac{\mu_0 dI}{2\pi\sqrt{D^2+y^2}}\cos\alpha. \quad \text{avec } \cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{D^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow B_z = -\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\frac{dy}{(D^2+y^2)} = -2\frac{\mu_0 I D}{2\pi l D}\left[\operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{D}\right)\right]_0^{l/2}.$$

soit : $\boxed{\vec{B}(M) = -\left(\frac{\mu_0 I}{\pi \ell}\right) \mathrm{Arctg}\left(\frac{\ell}{2D}\right) \vec{u}_y}$



φ angle sous lequel, de M, on voit la nappe :



$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\ell}{2D}$.

$\varphi = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\ell}{2D}\right)$.

$\Rightarrow \boxed{B(M) = \frac{\mu_0 I}{\pi \ell}\varphi}$

<u>AN :</u> $\ell = 1\,\mathrm{cm}$ $D = 2\,\mathrm{cm}$ $\Rightarrow \varphi = 0,24\,\mathrm{rad}$.

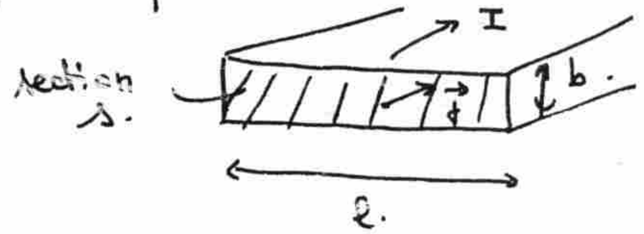
$\Rightarrow$ <u>$B = 0,97 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} = 0,97$ Gauss.</u>

(2o) <u>si $\ell \to \infty$:</u> lame infiniment large.

[a] on a la densité surfacique de courant : $\vec{j_S} = \frac{I}{\ell}\vec{u}_x$

(avec les axes choisis x, y, z).

[car, schématiquement, si la nappe est un volume de très faible épaisseur b :

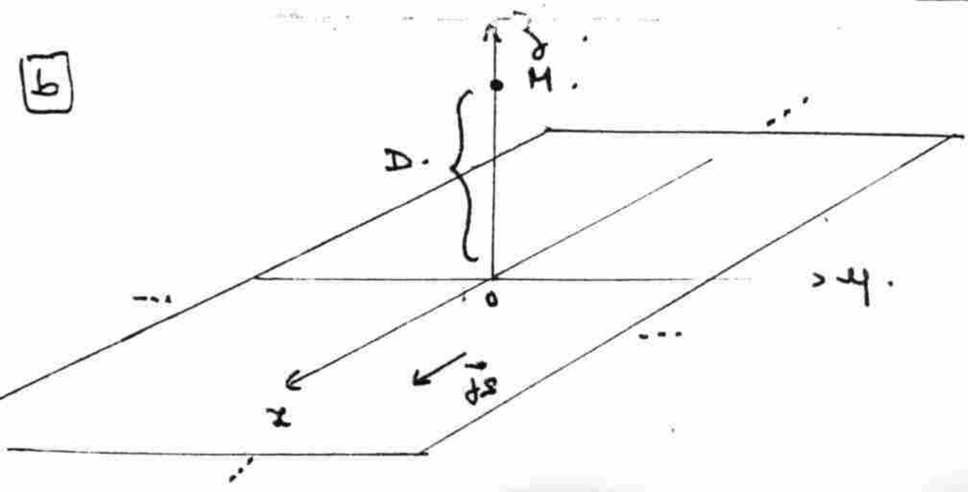


$\vec{I} = \vec{j}\cdot\underbrace{(b\ell)}_{s}$ et $\vec{j_s} = \vec{j}\cdot b$.

$\Rightarrow \vec{I} = \vec{j_s}\cdot\ell = I\vec{u}_x$]

$\frac{\ell}{2D} \to \infty \Rightarrow \varphi \to \frac{\pi}{2}$ et $\boxed{\vec{B}_\infty = -\frac{\mu_0 j_s}{2}\vec{u}_y}$

[b]



• plan (OMxz) plan de sym. de la distribution

$\Rightarrow \vec{B} \perp$ à ce plan

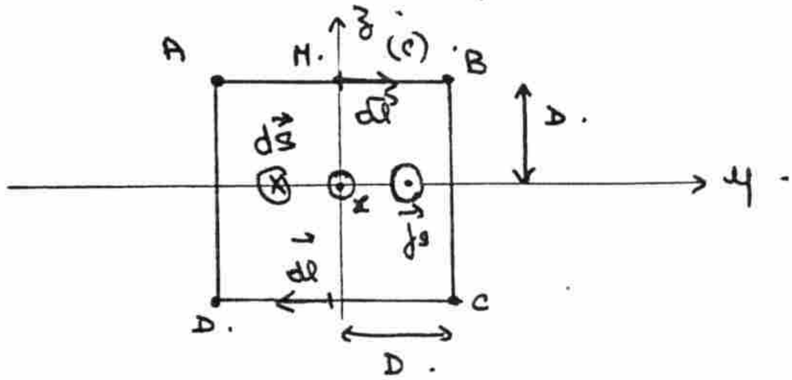
donc $\vec{B} = B\vec{u}_y$

- et invariance par translation le long de Ox et Oy : (c)

$B = B(z)$

- enfin le plan Oxy est plan de symétrie : alors si M' sym. de M par rapport à Oxy : $\vec{B}(M') = -\vec{B}(M)$.

- Th. d'Ampère sur un carré de côtés // à Oy et Oz, de longueur $2D$, de part et d'autre du plan Oxy.

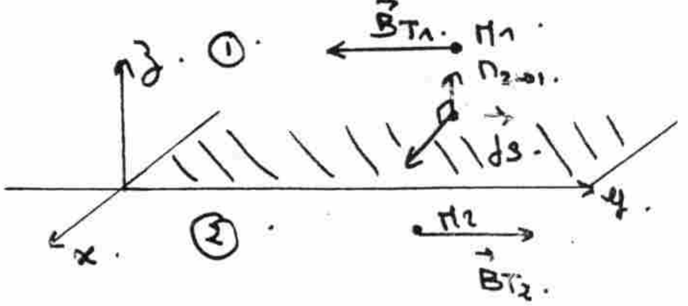


$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{j}.\vec{dS} = -\mu_0 2D j_s = \int_{AB} \vec{B}.\vec{dl} + \underbrace{\int_{BC} \vec{B}.\vec{dl}}_{=0 \text{ car } \vec{B} \perp \vec{dl}} + \int_{CD} \vec{B}.\vec{dl} + \underbrace{\int_{DA} \vec{B}.\vec{dl}}_{=\vec{0}}$$

$$= B(M) \cdot 2D - (-B(M))\, 2D = 4D B(M).$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \cdot \vec{u}_y}$ pour M au dessus. $\vec{B}(M') = -\vec{B}(M)$.

Discontinuité de $\vec{B}_T$ à la traversée de la surface chargée :



$$\vec{B}_{T_1} = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_{T_2} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{T_1} - \vec{B}_{T_2} = -\mu_0 j_s \vec{u}_y$$

$$\mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1\to 2} = \mu_0 j_s \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\mu_0 j_s \vec{u}_y$$

on a bien : $\underline{\vec{B}_{T_1} - \vec{B}_{T_2} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$

(3°) Si $l \to 0$: lame infiniment étroite alors $\varphi \to 0$.

(a) $B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi D}\right) \frac{\varphi}{tg\varphi}$ $\qquad tg\varphi \sim \varphi$ si $\varphi \to 0$.

d'où : $\boxed{\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi D} \vec{u}_y}$ champ d'un fil rectiligne infini.

(b) Erreur relative commise sur le champ en l'assimilant (26)

à $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$.

on a $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}\left(\frac{\varphi}{\varphi + \frac{\varphi^3}{3}+\dots}\right) \# \frac{\mu_0 I}{2\pi D}\left(1 - \frac{\varphi^2}{3}+\dots\right)$.

$|B-B_0| = \frac{\mu_0 \cancel{I}}{\cancel{2\pi D}}\left(\frac{\varphi^2}{3}\right) \leq \frac{B_0}{100} = \frac{\mu_0 \cancel{I}}{\cancel{2\pi D}}\ \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \varphi^2 \leq 0{,}03$ soit, comme $\varphi \# \operatorname{tg}\varphi = \frac{\ell}{2D}$.

$\Rightarrow \boxed{\ell^2_{max} = \frac{2\times 12\, D^2}{100}}$

MES 102

(1°) Spire : $B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\ \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}$ $\quad z = \overline{OM}$

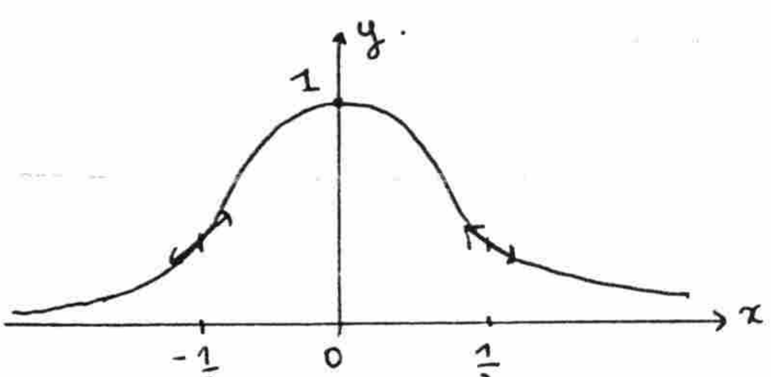
$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a}$ $\quad B(z) = B_0\, \frac{a^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow y(x) = \frac{a^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

en posant $x = \frac{\overline{OM}}{a}$; $\boxed{y(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}}$

$y'(x) = \frac{-3x}{(1+x^2)^{5/2}}$

$y''(x) = -\frac{3}{(1+x^2)^{5/2}} + \frac{3x(5x)}{(1+x^2)^{7/2}} = \frac{15x^2 - 3 - 3x^2}{(1+x^2)^{7/2}} = 3.\ \frac{4x^2-1}{(1+x^2)^{7/2}}$

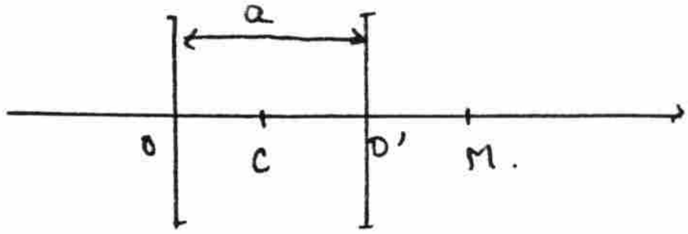
$\boxed{\text{points d'inflexion : } \quad x = \pm \frac{1}{2}}$



(2°) Bobines d'Helmholtz : $B = B_1 + B_2$

pour B_1 : on remplace z par $z + \frac{a}{2}$ donc x par $x + 1/2$

pour B_2 : " " " $z - a/2$ donc x par $x - 1/2$



$$y(x) = \frac{1}{\left(1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$y'(x) = \frac{-3(x-1/2)}{\left(1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{-3(x+1/2)}{\left(1+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{5/2}} \Rightarrow \underline{y'(0)=0.}$$

$$y''(x) = 3 \cdot \frac{4\left(x-1/2\right)^2-1}{\left(1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{7/2}} + 3 \cdot \frac{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{7/2}} \Rightarrow \underline{y''(0)=0.}$$

Ainsi au voisinage de C : $y(x)$ varie très peu (pt d'inflexion à tangente horizontale).

$$B_C = B_0 \frac{a^3}{\left(a^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{B_0 a^3}{\left(a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{B_C = \frac{16\sqrt{5}}{25} B_0}.$$

3°) $$\boxed{y(x) = \frac{B}{B_C} = \frac{25}{16\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\left(1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{5/2}}\right.}$$

4°) DL au voisinage de 0 :

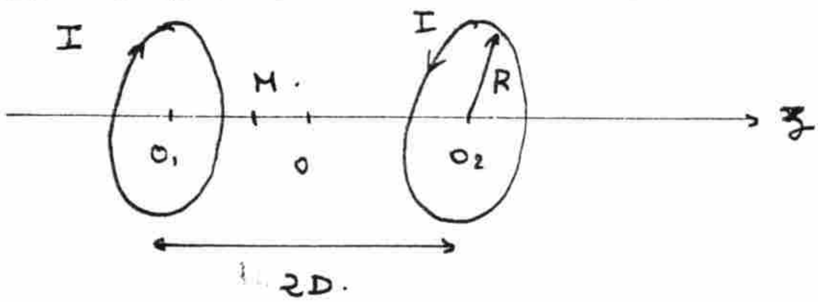
$$y(x) = 1 - 1{,}152\, x^4 + o(x^6)$$

on cherche x / $|y(x)-1|$ 10^{-3} $\Rightarrow x = 0{,}17$

$\Rightarrow$ Le champ reste constant au millième près sur 34 % de la longueur autour de C

MS 103

on redémontrerait le champ créé par une bobine (spire circulaire) en un point de son axe :



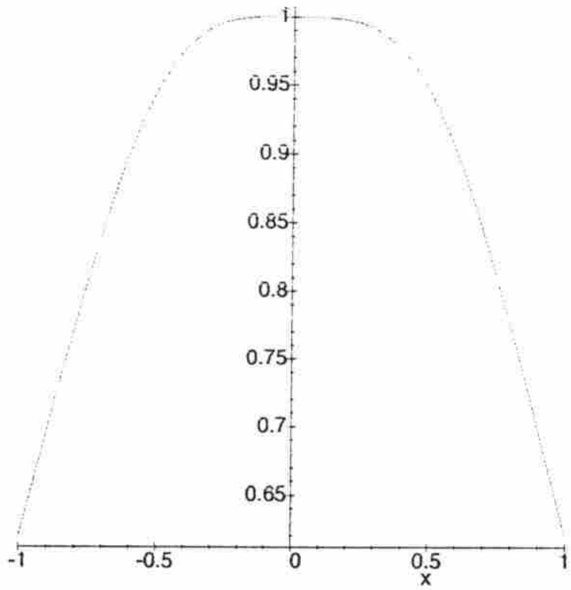
$$\vec{B}_z(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{\left(R^2+(z-D)^2\right)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Bobines d'Helmholtz.


```
STUDENT > f:=x->(25/(16*5^(0.5)))*((1+(x-0.5)^2)^(-1.5)+(1+(x+0.5)
          ^2)^(-1.5));
```

$$f := x \rightarrow \frac{.6987712428}{\left(1+(x-.5)^2\right)^{1.5}} + \frac{.6987712428}{\left(1+(x+.5)^2\right)^{1.5}}$$

```
STUDENT > plot(f(x),x=-1..1);
```




```
STUDENT > taylor(f(x),x=0);
```

$$.9999999990 - 1.152000000\, x^4 + O(x^6)$$

```
STUDENT >
```

$$\vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 I}{2R}\,\frac{R^3}{\left(R^2+(z+D)^2\right)^{3/2}}\,\vec{u}_z \quad \Rightarrow \text{avec } B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

$$\Rightarrow B_z(M) = B_0\left[\frac{R^3}{\left(R^2+(z-D)^2\right)^{3/2}} - \frac{R^3}{\left(R^2+(z+D)^2\right)^{3/2}}\right]$$

$$\left(\frac{dB_z}{dz}\right) = B_0R^3\left[-\frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{(z-D)\times\cancel{2}}{\left(R^2+(z-D)^2\right)^{5/2}} + \frac{\frac{3}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times(z+D)}{\left(R^2+(z+D)^2\right)^{5/2}}\right].$$

$\left(\frac{dB_z}{dz}\right)_{z=0}$ est maximal ⇒ il vaut :

$$\boxed{\left(\frac{dB_z}{dz}\right)_{z=0} = B_0\,\frac{6DR^3}{\left(R^2+D^2\right)^{5/2}}}$$

Le gradient de champ est $\left(\frac{dB_z}{dz}\right)\vec{u}_z$. Pour $D = \frac{R}{2}$.

en $z=0$: $\left(\frac{dB_z}{dz}\right)_{z=0} = B_0\,\frac{96}{5^{5/2}R}.$

<u>gradient constant</u> :

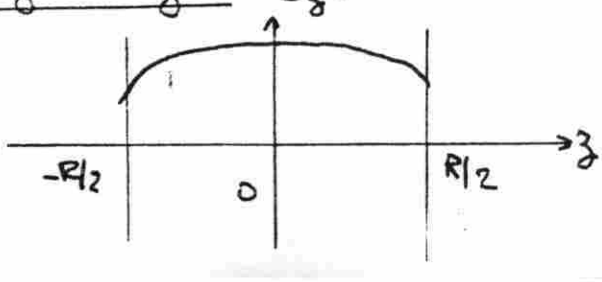
$$\frac{d^2B_z}{dz^2} = 3B_0R^3\left[\frac{-\left(R^2+(z-D)^2\right)^{3/2} + (z-D)\times\frac{5}{2}\times 2(z-D)\left(R^2+(z-D)^2\right)^{3/2}}{\left(R^2+(z-D)^2\right)^5}\right.$$

$$\left. + \frac{\left(R^2+(z+D)^2\right)^{3/2} - (z+D)\times\frac{5}{2}\times 2(z+D)\left(R^2+(z+D)^2\right)^{3/2}}{\left(R^2+(z+D)^2\right)^5}\right]$$

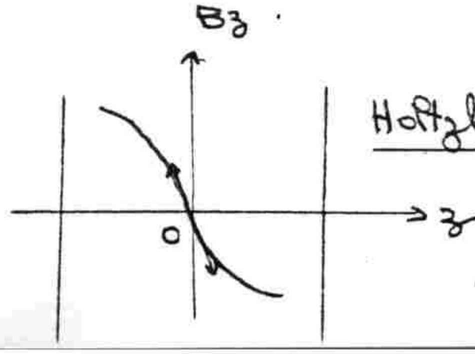
en $z=0$: $\frac{d^2B_z}{dz^2} = \frac{3B_0R^3}{(R^2+D^2)^5}\left[-(R^2+D)^{3/2} + (R^2+D^2)^{3/2}\cdot 5D^2 + (R^2+D^2)^{3/2} - (R^2+D^2)^{3/2}\times 5\cdot D^2\right] = 0.$

<u>on a bien un gradient maximal et ~ constant au voisinage de $z=0$</u> : B_z.

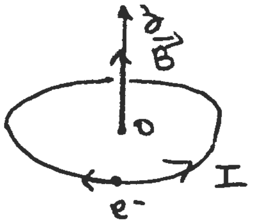
Helmholtz



Holtzhelm



MS 104



Le mvt de l'e^- sur son orbite est équivalent à une boucle de courant de centre O le noyau, de rayon a, parcourue par : $I = \dfrac{e}{T} = \dfrac{e\omega}{2\pi} = \dfrac{ev}{2\pi a}$.

Calcul de v : force électrostatique prépondérante :

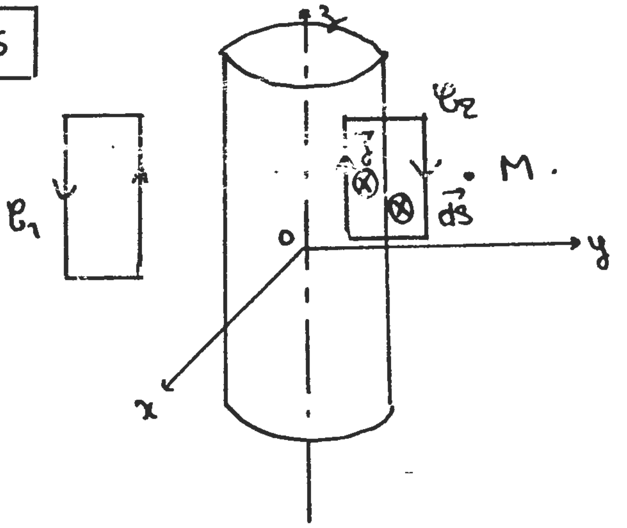
$$m\frac{v^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2c^2}{ma}.$$

Calcul de B :

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{\mu_0 e}{4\pi a^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\frac{ec}{\sqrt{ma}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(0) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{3/2}\frac{e^2c}{\sqrt{ma}\,a^2}}$$

MS 105



$\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$

charges volumiques ρ ⇒ courants volumiques :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = r\rho\omega\vec{u}_\theta$$

(*) Le plan contenant M et $\perp Oz$ est plan de symétrie des courants :
$\vec{B}(M) \parallel \vec{u}_z$

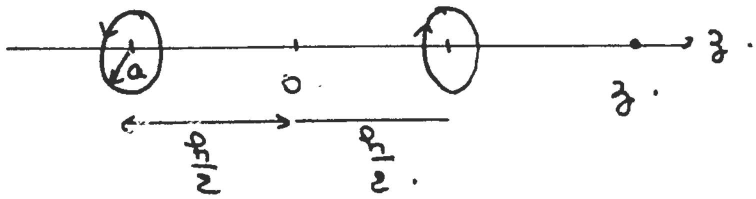
(*) th. d'Ampère : sur $(C_1) \Rightarrow B(r_1) = B(r_2)$
$\Rightarrow \vec{B}$ uniforme à l'extérieur
$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{ext} = \vec{0}}$.

Th. d'Ampère : sur $(C_2) \Rightarrow B(r_1)h = \mu_0\int_{r_1}^{a} h\,dr\,j(r) = \int_{r_1}^{a} h\rho\omega r\,dr\,\mu_0$

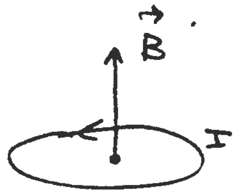
$\Rightarrow B(r_1) = \rho\omega\mu_0\left(\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{r_1^2}{2}\right)$. $\Rightarrow \vec{B}_{int} = \dfrac{\mu_0\rho\omega}{2}(a^2 - r^2)\vec{u}_z$

MS 106.

$|z| >> a$ et h.



champ $\vec{B}$ d'une spire circulaire :



$$\vec{B}_{\pm} = \pm \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}^{\,3}} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_- = \frac{\mu_0 I}{2a} a^3 \left[\left(a^2 + z^2 + hz + \frac{h^2}{4}\right)^{-3/2} - \left(a^2 + z^2 - hz + \frac{h^2}{4}\right)^{-3/2} \right].$$

au 1er ordre en $\frac{a}{z}$ ou $\frac{h}{z}$, il vient :

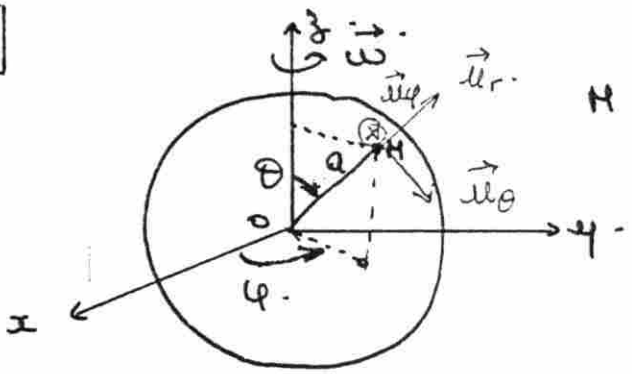
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2a}\frac{a^3}{z^3}\cdot\frac{-3h}{z}\vec{u}_z.$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{3\mu_0 I}{2}\frac{a^2 h}{z^4}}$$

<u>Dipôle magnétique:</u> décroissance en $\frac{1}{r^3}$.

<u>Ici quadrupôle:</u> en $\frac{1}{r^4}$!

$\boxed{\text{MS 107}}$

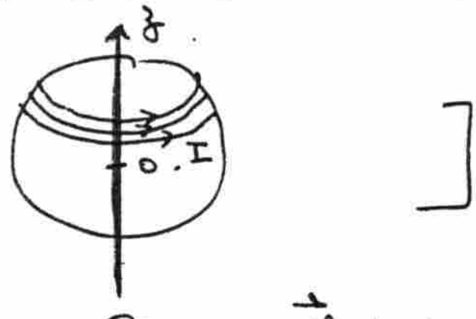


M point de la surface $(r,\theta,\varphi) = (a,\theta,\varphi)$

(1) la sphère est équivalente à une distribution surfacique de courant, de densité $\vec{j}_S(M) = \sigma\vec{v}(M)$ avec $\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = a\omega\sin\theta\,\vec{u}$

<u>$\vec{j}_S = \sigma a\omega\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$</u>

[tout se passe comme si la sphère était recouverte d'un bobinage ⊥ à l'axe z :



]

par définition: <u>le moment magnétique $\vec{M}$ de la sphère</u> est alors :

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}}\vec{r}\wedge\vec{j}\,d\tau = \frac{1}{2}\iint_S \vec{r}\wedge\vec{j}_S\,dS.$$

$\vec{r} = \vec{OM} = a\vec{u}_r$ $\qquad dS = a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. en coord. sphériques

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{2}a^2\sigma a\omega\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\varphi)}_{-\vec{u}_\theta}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y - \sin\theta\,\vec{u}_z$$

alors : $\mathcal{M}_x = \frac{1}{2}a^3\sigma\omega a \underbrace{\int_0^{2\pi} -\cos\varphi\, d\varphi}_{=0} \int_0^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta$.

$$\mathcal{M}_y = \frac{1}{2}a^3\sigma\omega a \underbrace{\int_0^{2\pi} -\sin\varphi\, d\varphi}_{=0} \int_0^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta .$$

$$\mathcal{M}_z = \frac{1}{2}a^3\sigma\omega \times 2\pi a \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{= \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{4}{3}} .$$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}a^4\sigma\omega \frac{8\pi}{3} \vec{u}_z$ or $\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$

d'où : $\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{3}a^2\omega q\, \vec{u}_z = \frac{1}{3}q a^2 \vec{\omega}}$

2° Biot et Savart : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{j}_s \wedge \vec{PO}}{\|PO\|^3} dS$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{PO} = -a\vec{u}_r \\ \vec{j}_s = \sigma a\omega \sin\theta\, \vec{u}_\varphi \end{array}\right\}$ $\vec{j}_s \wedge \vec{PO} = -\sigma a^2\omega \sin\theta\, \vec{u}_\theta$

$dS = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma a^4 \omega}{a^3} \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} + \sin^3\theta\, \vec{u}_\theta}_{\text{déjà calculé en } 1° : = +\frac{8\pi}{3}\vec{u}_z}$$

et $\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q\vec{\omega}}{a}}$$

3° Loi de Biot et Savart : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{j}_s\, dS}{\|PM\|}$

et $\vec{j}_s = \sigma \vec{v} = \frac{q}{4\pi a^2} \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$ d'où

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 q}{16\pi^2 a^2} \oiint_S \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{OP}\, dS}{\|\vec{PM}\|} = \frac{\mu_0 q}{16\pi^2 a^2} \vec{\omega} \wedge \oiint_S \frac{a\, \vec{dS}}{\|\vec{PM}\|} \quad \text{car } \vec{OP} \,//\, \vec{dS}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 q}{16\pi^2 a} \vec{\omega} \wedge \iiint_V \vec{\text{grad}}_P \frac{1}{\|\vec{PM}\|} d\tau .$$

$$\vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 q}{16\pi^2 a}\cdot \vec{\omega}\wedge\vec{K} \quad \text{avec} \quad \vec{K} = \iiint_V \frac{\vec{PM}\, d\tau}{\|\vec{PM}\|^3}$$

Si $\vec{E}(M)$ est le champ créé en M par une sphère (V) de centre O de rayon a, chargée uniformément en volume $\left(\rho = \frac{3q}{4\pi a^3}\right)$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\, \vec{PM}\, d\tau}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{3q}{16\pi^2\varepsilon_0 a^3}\,\vec{K}$$

Donc $\vec{K}$ se calcule en calculant $\vec{E}(M)$ par le th. de Gauss :

→ à l'extérieur : $\vec{E}_e(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ $\quad \vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ et $r = \|\vec{OM}\|$.

$$\text{d'où } \vec{K}_e = \frac{16\pi^2\varepsilon_0 a^3}{3q}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{4\pi a^3}{3r^2}\vec{u}_r$$

→ à l'intérieur : $\vec{E}_i(M) = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{u}_r$

$$\text{d'où } \vec{K}_i = \frac{16\pi^2\varepsilon_0 a^3}{3q}\cdot\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{u}_r = \frac{4\pi r}{3}\vec{u}_r = \frac{4\pi}{3}\vec{OM}$$

D'où : → à l'intérieur de la sphère :

$$\vec{A}_i(M) = -\frac{\mu_0 q}{12\pi a}\vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

or le potentiel-vecteur d'un champ uniforme $\vec{B}_0$ est : $\frac{1}{2}\vec{B}_0\wedge\vec{r}$

Donc à l'intérieur, on a un champ $\vec{B}_i$ uniforme égal à $\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 q\vec{\omega}}{6\pi a}$.

→ à l'extérieur : $\vec{A}_e(M) = \frac{a^3\mu_0 q}{12\pi r^2}\vec{\omega}\wedge\vec{u}_r = \frac{a^2\mu_0 q}{12\pi}\vec{\omega}\wedge\frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$

pot-vecteur du dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{3}qa^2\vec{\omega}$

MS [illegible] n°8 Bobine torique

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_1 \text{ à l'intérieur du tore : (dû à } I_1) \quad \vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta \\ \vec{B}_2 \text{ dû à } I_2 : \quad \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta \end{array} \right.$

ρ distance à l'axe

déjà vu (exercice de cours).

Φ_1 flux de $\vec{B}_1$ à travers les N_1 spires du primaire :

$$d\Phi_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\rho} \cdot \underbrace{2aN_1 d\rho}_{dS} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) I$$

d'où : $\boxed{L_1 = \dfrac{\mu_0 a N_1^2}{\pi} \ln\left(\dfrac{R+a}{R-a}\right)}$

de même : $\boxed{L_2 = \dfrac{\mu_0 a N_2^2}{\pi} \ln\left(\dfrac{R+a}{R-a}\right)}$

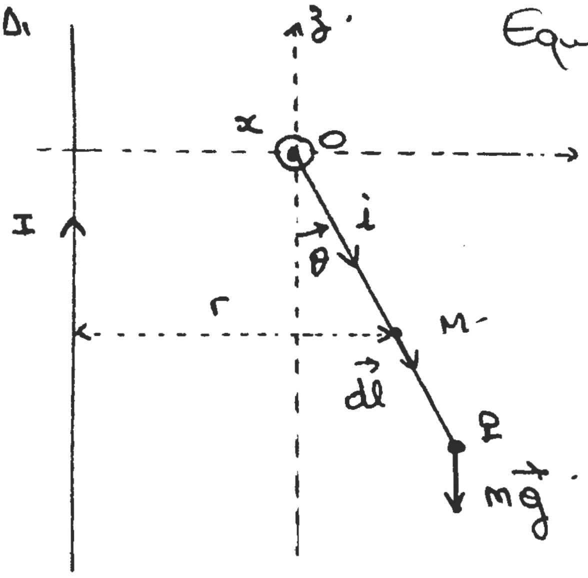
et on a $d\Phi_{1\to2} = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\rho} 2aN_2 d\rho \Rightarrow \Phi_{1\to2} = \dfrac{\mu_0 a N_1 N_2}{\pi} \ln\left(\dfrac{R+a}{R-a}\right) I_1$

$\Rightarrow \boxed{|M| = \dfrac{\mu_0 a N_1 N_2}{\pi} \ln\left(\dfrac{R+a}{R-a}\right)}$, on a : $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ couplage parfait

MS 213

Equilibre pendule.

(10)



$OP = L$.

(a) force de Laplace : $\vec{dF} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$

moment en O : $\vec{d\Gamma_0} = i\,\vec{OM} \wedge (\vec{dl} \wedge \vec{B})$.

$\vec{B} = \vec{B}$ créé par le fil $= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_x$

3

$OM = \ell \qquad 0 \le \ell \le L. \qquad$ et $\qquad r = a + \ell \sin\theta$

$\vec{d\ell} = d\ell\,(\sin\theta\,\vec{u}_y - \cos\theta\,\vec{u}_z)$. et $\vec{OM} = \ell\,(\sin\theta\,\vec{u}_y - \cos\theta\,\vec{u}_z)$.

$\vec{d\ell} \wedge \vec{B} = + \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,d\ell\,(\vec{u}_z \sin\theta + \cos\theta\,\vec{u}_y)$.

$$\vec{OM} \wedge (\vec{d\ell} \wedge \vec{B}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\ell\,d\ell \begin{vmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ -\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\ell\,d\ell \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{d\Gamma_0} = \frac{\mu_0 i I}{2\pi}\,\frac{\ell\,d\ell}{a + \ell\sin\theta}\,\vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\Gamma_0} = \frac{\mu_0 I i}{2\pi} \int_0^L \frac{\ell\,d\ell}{a + \ell\sin\theta}\,\vec{u}_x$$

Lourrin

$$\frac{x}{a + x\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\left(1 - \frac{a}{a + x\sin\theta}\right)$$

Intégration par parties : $\quad u = \ell \qquad u' = 1.$

$$v' = \frac{1}{a + \ell\sin\theta} \qquad v = \frac{1}{\sin\theta}\ln(a + \ell\sin\theta).$$

$$\int_0^L \frac{\ell\,d\ell}{a + \ell\sin\theta} = \left[\frac{\ell}{\sin\theta}\ln(a + \ell\sin\theta)\right]_0^L - \int_0^L \frac{1}{\sin\theta}\ln(a + \ell\sin\theta)\,d\ell.$$

$$= \frac{L}{\sin\theta}\ln(a + L\sin\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta}\Big[(a + \ell\sin\theta)\ln(a + \ell\sin\theta) - (a + \ell\sin$$

$$= \frac{L}{\sin\theta}\ln(a + L\sin\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta}\Big[(a + L\sin\theta)\big(\ln(a + L\sin\theta) - 1\big) - a(\ln a - a)\Big]$$

$$= \frac{L\sin\theta\ln(a + L\sin\theta) - (a + L\sin\theta)\ln(a + L\sin\theta) + L\sin\theta + a\ln a}{\sin^2\theta}.$$

$$= \frac{-a\ln(a + L\sin\theta) + L\sin\theta + a\ln a}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma_0} = \frac{\mu_0 I i}{2\pi\sin^2\theta}\left[L\sin\theta - a\ln\left(1 + \frac{L}{a}\sin\theta\right)\right]\vec{u}_x}$$

$\boxed{b}$ Théorème du moment cinétique en O à (OP) :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma_0}}{dt}\right) = \vec{0} = \vec{\Gamma_0} + \vec{OP} \wedge m\vec{g} = \vec{\Gamma_0} - mgL\sin\theta\,\vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu_0 I i}{2\pi\sin^2\theta}\left[L\sin\theta - a\ln\left(1 + \frac{L}{a}\sin\theta\right)\right] = mgL\sin\theta.$$

θ et sin θ petits et L et a du même ordre de grandeur :

$$\ln\left(1+\frac{L}{a}\sin\theta\right) \# \frac{L}{a}\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{L^2}{a^2}\sin^2\theta + \frac{L^3}{3a^3}\sin^3\theta + \cdots$$

$$\Rightarrow \Gamma_0 \simeq \frac{\mu_0 I i}{2\pi \sin^2\theta}\left[\frac{L^2}{2a}\sin^2\theta - \frac{L^3}{3a^2}\sin^3\theta + \cdots\right] = mgL\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 I i}{2\pi}\left[\frac{L^2}{2a} - \frac{L^3}{3a^2}\sin\theta\right] = mgL\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta \simeq \sin\theta = \frac{1}{\frac{2}{3}\frac{L}{a} + \frac{4mga\pi}{\mu_0 I i L}}}$$

c) $\frac{d\theta}{da} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{da}\left[\frac{2}{3}\frac{L}{a} + \frac{4\pi mg}{\mu_0 I i L}a\right] = 0$

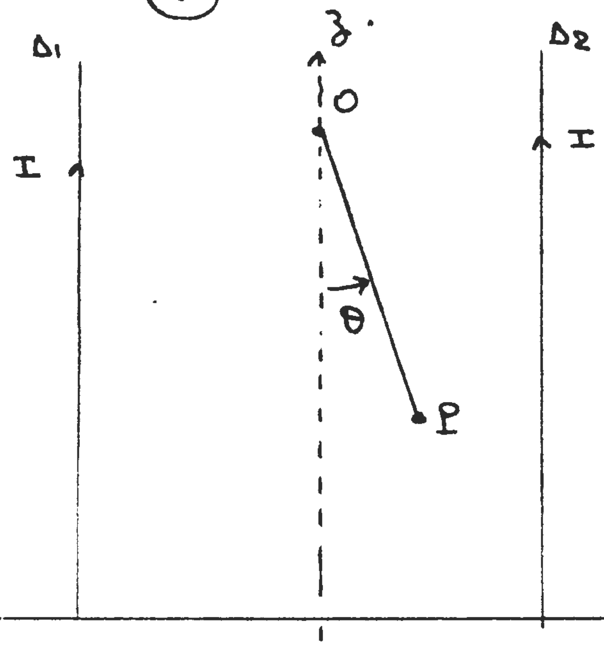
$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\frac{L}{a^2} + \frac{4\pi mg}{\mu_0 I i L} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_m = L\sqrt{\frac{\mu_0 I i}{6\pi mg}}}$

alors : $\theta_m = \frac{a}{\frac{2}{3}L + \frac{4\pi mg\, a_m^2}{\mu_0 I i L}} \Rightarrow \boxed{\theta_m = \frac{3a_m}{4L}}$ soit $\boxed{\theta_m = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu_0 I i}{6\pi mg}}}$

AN : $\theta_m = 0{,}122$ rad $\simeq 7°$

2°

a)



$\vec{\Gamma}_{01}$ est celui calculé au 1°.

$\vec{\Gamma}_{02}$: même calcul mais il faut changer $\vec{u}_x$ en $-\vec{u}_x$ et θ en −θ.

soit :

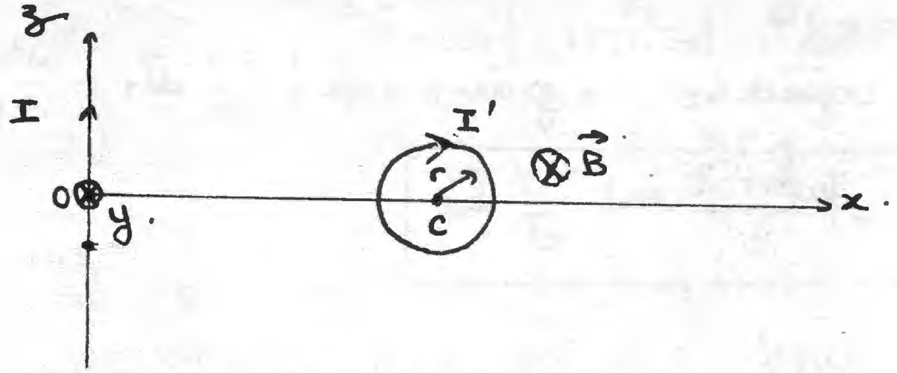
$$\vec{\Gamma}_{02} = \frac{\mu_0 I i}{2\pi\sin^2\theta}\left[L\sin\theta + a\ln\left(1-\frac{L}{a}\sin\theta\right)\right]\vec{u}$$

$\vec{\Gamma}_0 = \vec{\Gamma}_{01} + \vec{\Gamma}_{02}$ d'où :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_0 = \frac{\mu_0 I i}{2\pi\sin^2\theta}\left[2L\sin\theta - a\ln\left(\frac{a+L\sin\theta}{a-L\sin\theta}\right)\right]\vec{u}_x}$$

MS 214

(1°)



$\vec{B}$ créé par le fil : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{u}_\theta$

Si $x >> r$: $\vec{B} \simeq$ uniforme sur toute la surface (S) de la bobine

$\Rightarrow \quad \phi = nSB = n\cancel{\pi} r^2 \frac{\mu_0 I}{2\cancel{\pi} x} = MI$.

$\Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{\mu_0 n r^2}{2x}}$

(2°) $\delta W_{op} = -I\, d\phi_c$ flux coupé par le circuit lors du déplacement. (Th de Maxwell).

a.

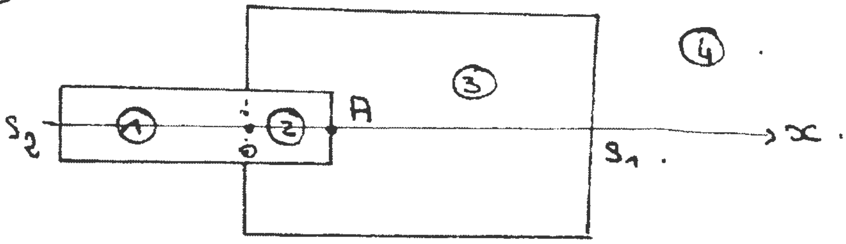
$d\phi_c$ = flux de $\vec{B}$ à travers la surface engendrée par le circuit lors du déplacement de dl.

= $d\phi$ variation du flux de $\vec{B}$ à travers (S)

MS 9

10

Autoinductance de 2 solénoïdes.



Domaine ①: $\vec{B} = \vec{B_2} = \mu_0 \frac{N_2}{a_2} I_2 \vec{u_x}$

Domaine ②: $\vec{B} = \vec{B_2} + \vec{B_1} = \mu_0 \left(\frac{N_1 I_1}{a_1} + \frac{N_2 I_2}{a_2} \right) \vec{u_x}$

Domaine ③: $\vec{B} = \vec{B_1} = \mu_0 \frac{N_1}{a_1} I_1 \vec{u_x}$

Domaine ④: $\vec{B} = \vec{B_4} = \vec{0}$

Densité de courant associée à un champ donné

1. On prend 2 contours de rayons r et r+dr orientés comme ci-dessous : $\vec{j}$ est sur $\vec{e_z}$ car $\vec{B}$ est sur $\vec{e_\theta}$ ($\vec{B}$ s'enroule autour de $\vec{j}$)

Th. d'Ampère à $\{C_1 \cup C_2\}$:

$$B(r+dr).2\pi(r+dr) - B(r).2\pi r = \mu_0 j \, 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow \frac{d \, rB(r)}{dr} . \cancel{2\pi} dr = \mu_0 j \, \cancel{2\pi} r \cancel{dr}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB(r)) \vec{e_z}$$ (avec Maxwell $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$)

$r > a$: $\vec{j_{ext}} = \vec{0}$

$0 < r < a$: $\vec{j_{int}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(B_0 \frac{r^2}{a^3} e^{-\frac{r}{a}} \right) \vec{e_z} = \frac{B_0}{\mu_0 a^3} e^{-\frac{r}{a}} \left(2 - \frac{r}{a} \right) \vec{e_z}$

2. relation de passage :

② → ext

① → int

$$\vec{B_2} - \vec{B_1} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n_{12}}$$

$$0 - \frac{B_0}{e} \vec{e_\theta} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{e_r} \quad \Rightarrow \quad \vec{j_s} = \frac{B_0}{\mu_0 e} \vec{e_z}$$