Corrigé planche n° 8

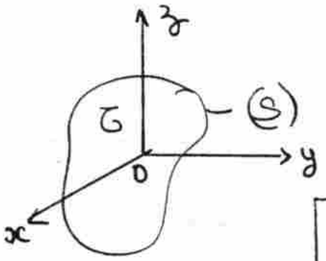
Exercice 1 : $\vec{A}(M) = r\,\vec{u}_r = \vec{OM}$

ⓐ $\mathrm{div}\,\vec{A} = 3$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$

$\vec{\Delta A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z = \vec{0}.$

ⓑ



$\tau = \iiint_V d\tau.$

Th. de Green - Ostrogradski :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{3}\iiint \mathrm{div}\,\vec{A}\,.d\tau = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{A}.\vec{dS}}$$

ⓒ Lignes de champ : droites passant par O, dirigées vers l'extérieur

$\vec{A}$ dérive du potentiel $\boxed{U = -\frac{r^2}{2} +}$

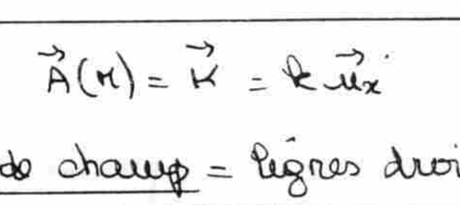
Surfaces équi-U = sphères de centre O.

$U = U_0 \Rightarrow$ sphère de rayon $r_1 = \sqrt{2(\quad -U_0)}$

$U = 2U_0 \Rightarrow$ " " $r_2 = \sqrt{2(\quad -2U_0)}$

⋮

Les équipotentielles se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre



elles sont très serrées vers l'∞.

Exercice 2. $\vec{A}(M) = \vec{K} = k\,\vec{u}_x$

ⓐ Lignes de champ = lignes droites // $\vec{u}_x$

$\vec{A} = -\vec{\mathrm{grad}}\,U \Leftrightarrow \boxed{U = -kx + cte}$

Surfaces équi-U = plans ⊥ Ox, ⊥ aux lignes de champ.

comme k est constant, elles sont régulièrement espacées

(b) $\text{div}\,\vec{A} = 0 \Rightarrow \iiint_{\tau} \text{div}\,\vec{A}\, d\tau = 0 \Rightarrow \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{dS} = 0$

$\vec{A}$ est à flux conservatif.

(c) $\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

Surface équi-V = plan $x = cte$ par exemple

Donc V ne dépend que de x.

$\Rightarrow \vec{A}' = -\left(\dfrac{dV}{dx}\right)\vec{u}_x$ <u>n'est pas nécessairement uniforme.</u>

Mais $\vec{A}'$ a une direction fixe dans l'espace. Donc par exemple $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}' = \vec{0}$ – $\vec{A}'$ diverge mais ne tourne pas.

<u>Exercice 3</u>

$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta = Oz$.

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{v} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\omega} \\ \Delta\vec{v} = 0 \end{cases}$$

Le champ des vitesses ne diverge pas, il tourne.

<u>Exercice 4.</u>

$\vec{s}(\vec{r},t) = \vec{s}_m \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ et $\underline{\vec{s}} = \underline{\vec{s}_m}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{\vec{s}}}{\partial t} = j\omega\,\underline{\vec{s}} \\ \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{s}}}{\partial t^2} = -\omega^2\,\underline{\vec{s}} \end{cases}$$

$$\text{div}\,\underline{\vec{s}} = \frac{\partial \underline{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{s}_z}{\partial z} = -j\,\vec{k}\cdot\underline{\vec{s}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{s}} = -j\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{s}}$$

$$\Delta\underline{\vec{s}} = -k^2\,\underline{\vec{s}}$$

<u>Exercice 5.</u>

$\vec{A} = A_x\,\vec{u}_x$ par ex.

$$\overrightarrow{\text{Grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(Ax)\,\vec{u}_x = A\vec{u}_x = \vec{A}.$$

idem si $\vec{A} \,//\, \vec{u}_y$ ou $\vec{u}_z$ $\qquad$ CQFD.

Exercice 6

$\vec{A} = f(r)\,\vec{r}$

(a) Si $\operatorname{div}\vec{A} = 0$: $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^3 f(r)\right) = 0 \Rightarrow r^3 f(r) = cte$

$\Rightarrow \boxed{f(r) = \dfrac{cte}{r^3}}$

(b) $\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$ car aucune des dérivées croisées de r, θ, φ n'est non nulle

Exercice 7.

$$\oint\!\!\oint_S \left(U\,\vec{grad}\,V - V\,\vec{grad}\,U\right).\vec{dS} = \iiint_V \left(\operatorname{div}\left[U\,\vec{grad}\,V\right] - \operatorname{div}\left[V\,\vec{grad}\,U\right]\right)d\tau.$$

$$\operatorname{div}\left(U\,\vec{grad}\,V\right) = U\operatorname{div}\left(\vec{grad}\,V\right) + \vec{grad}\,V.\vec{grad}\,U$$

$$\operatorname{div}\left(V.\vec{grad}\,U\right) = V\operatorname{div}\left(\vec{grad}\,U\right) + \vec{grad}\,U.\vec{grad}\,V.$$

$$\Rightarrow \qquad = \iiint_V \left(U\,\Delta V - V\,\Delta U\right)d\tau.$$

Exercice 8.

(a) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{x}{r}\vec{u}_x + \dfrac{y}{r}\vec{u}_y + \dfrac{z}{r}\vec{u}_z$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{2}{r}}$

(b) $\displaystyle\oint\!\!\oint_S \vec{a}.\vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,d\tau = \iiint_V \frac{2}{r}.\,4\pi r^2 dr = 8\pi\int_0^R r\,dr$

$\Rightarrow \underline{\displaystyle\iint_S \vec{a}.\vec{dS} = 4\pi R^2}$

Calcul direct : $\displaystyle\oint\!\!\oint_S \vec{u}_r.\vec{dS}$ $\qquad \vec{dS} = dS\,\vec{u}_r \Rightarrow \underline{\displaystyle\oint\!\!\oint_S \vec{a}.\vec{dS} = 4\pi R^2}$

Exercice 9.

$V = \dfrac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\qquad \vec{E} = -\,\vec{grad}\,V = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{grad}\left(\dfrac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}\right)$

$$\vec{grad}\left(\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\vec{grad}\left(\vec{p}.\vec{r}\right) + \vec{p}.\vec{r}\;\vec{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

$\vec{\text{grad}}\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \vec{p}$ (cf exo. 5).

$\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]}.$$