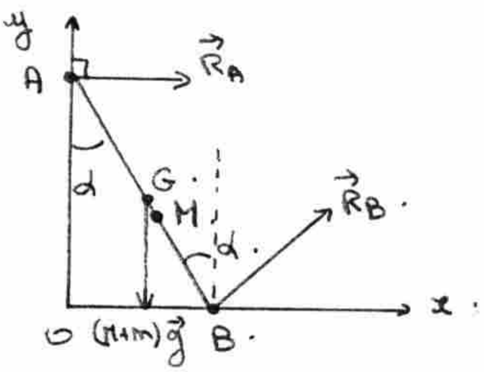
Equilibre d'une échelle.



Equilibre : (1) Th. de la résultante cinétique $\vec{R}_A + \vec{R}_B + (M+m)\vec{g} = \vec{0}$

(2) Th. du moment cinétique en B $\vec{BA} \wedge \vec{R}_A + \vec{BG} \wedge (M+m)\vec{g} = \vec{0}$

Soit x la distance (BM). Alors : $x \in [0, \ell]$.

$$(M+m)(BG) = \frac{m\ell}{2} + Mx \Rightarrow \vec{BG} = \frac{m\ell/2 + Mx}{M+m} \begin{vmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{BA} = \ell \begin{vmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

(1) $\Rightarrow$ $R_A = -R_{Bt}$

$R_{Bn} = (M+m)g$

(2) $\Rightarrow$ $-\ell R_A \cos\alpha + \left(m\frac{\ell}{2} + Mx\right) g \sin\alpha = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_A &= \left(\frac{m}{2} + M\frac{x}{\ell}\right) g \, \mathrm{tg}\,\alpha = -R_{Bt} \\ R_{Bx} &= (M+m)g \end{aligned}}$$

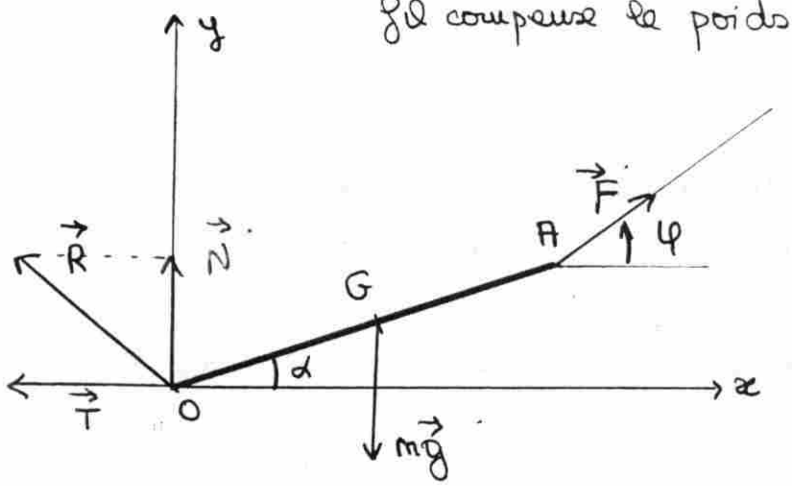
condition de non glissement : $|R_{Bt}| < f\,|R_{Bn}|$

soit : $\left(\frac{m}{2} + M\frac{x}{\ell}\right) g \, \mathrm{tg}\,\alpha < (M+m) g f \quad \forall x$.

$\Rightarrow$ en particulier si c'est vrai pour $x = \ell$ c'est vrai pour tout x dans $[0, \ell]$ donc :

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha < f \frac{M+m}{M+m/2} = \frac{M+m}{M+m/2} \, \mathrm{tg}\,\varphi}$$

On suppose $\varphi > \alpha$ et $\varphi < \alpha + \pi$ pour que la tension du fil compense le poids.



Système : tige

Forces : — poids en G
— action du sol $\vec{R}$ en O
— tension du fil $\vec{F}$ en A

(3 forces concourantes ...).

Equilibre de la tige : $\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$.

en projetant sur x et y avec $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

on a : $\boxed{\begin{cases} N = mg - F\sin\varphi \\ T = -F\cos\varphi \end{cases}}$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_A(m\vec{g}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{AO} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) + \vec{AG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2\ell \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} +T \\ N \\ 0 \end{vmatrix} + \ell \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} = 0$.

$\Rightarrow 2\ell\,(N\cos\alpha + T\sin\alpha) + \ell\,(-mg\cos\alpha) = 0$.

$\Rightarrow \underline{mg - 2N + 2\tan\alpha\, T = 0}$

ce qui donne

$$T = \frac{mg}{\tan\alpha - \tan\varphi}\,\frac{1}{2}$$

$$N = \frac{1}{2}mg\,\frac{\tan\varphi - 2\tan}{\tan\varphi - \tan}$$

⊛ Pour que le contact ait lieu, il faut déjà que : $N > 0$

donc que : $\underline{\tan\varphi < \tan\alpha}$ ou $\underline{\tan\varphi > 2\tan\alpha}$.

⊛ Il faut en outre que la condition de non glissement soit vérifiée :

$|T| < f\,|N|$.

<u>1er cas</u> : $\underline{\tan\varphi < \tan\alpha}$: alors $T > 0$

et elle se traduit par : $\frac{1}{2}\,\frac{1}{\tan\alpha - \tan\varphi} < \frac{f}{2}\,\frac{1}{\tan\alpha - \tan\varphi}\,(2\tan\alpha - \tan\varphi)$

soit : $\boxed{\tan\varphi < 2\tan\alpha - \frac{1}{f}}$

on a donc la double condition : $\begin{cases} \tan\varphi < \tan\alpha \\ \tan\varphi < 2\tan\alpha - 1/f. \end{cases}$

Donc : si $f > \frac{1}{\tan\alpha}$ fort frottement : la condition de non gliss! est automatiquement vérifiée si $N > 0$.

si $f < \frac{1}{\tan\alpha}$ faible frottement : φ est limitée par la condition de non glissement

$$\tan\varphi < 2\tan\alpha - \frac{1}{f}$$

si f vraiment petit : la seule valeur de φ convenable est $\frac{\pi}{2}$

2e cas : si $\tan\varphi > 2\tan\alpha$, T est négative et la relation de non glissement s'écrit : $-T < fN$.

soit : $\frac{1}{2}\frac{1}{\tan\varphi - \tan\alpha} < \frac{f}{2}\frac{\tan\varphi - 2\tan\alpha}{\tan\varphi - \tan\alpha} \Rightarrow \tan\varphi > \frac{1}{f} + 2\tan\alpha$

Là, la condition de non glissement impose la plage de valeurs de φ : $\tan\varphi > \frac{1}{f} + 2\tan\alpha$.

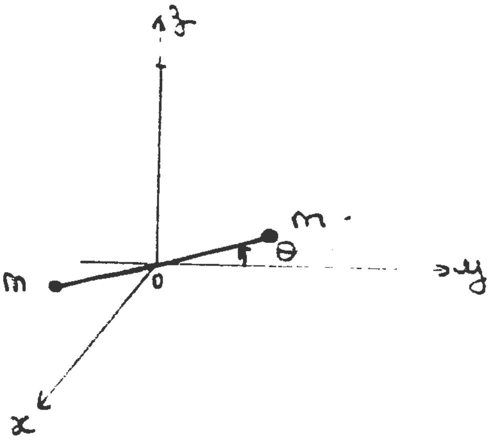
Conclusion : la tige reste en équilibre lorsque :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi < \operatorname{Min}\left[\alpha+\pi,\ \operatorname{Arctan}\left(2\tan\alpha - \frac{1}{f}\right)\right] \\ \text{ou} \\ \varphi > \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{f} + 2\tan\alpha\right). \end{array}}$$

Planche n° 7 — Corrigé

MES 401

1°)



réf : $(Oxyz) = (R)$ galiléen

syst : barre + 2m.

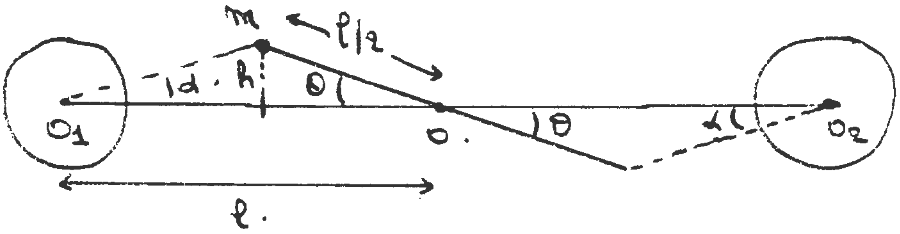
forces : couple de rappel $-C\theta$
poids $2m\vec{g}$ en O.

Th. du moment cinétique en O projeté sur Oz :

$$J\ddot{\theta} = -C\theta \quad \text{avec } J = 2m\frac{\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{2C}}}$$

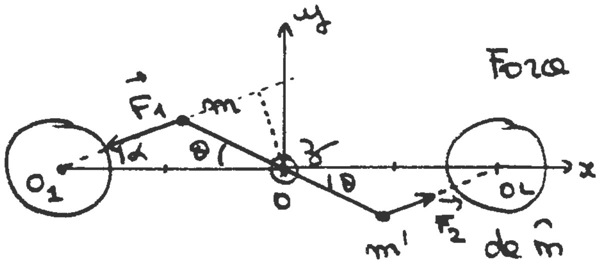
2°)



$O_1m \# \frac{\ell}{2}$ au 1er ordre en θ. et sin α # α # $\frac{h}{\ell/2}$ # θ cqfd.

$$\boxed{\alpha \simeq \theta}$$

3°)



Force exercée par M_1 sur m la + proche :

$$\vec{F}_1 = \frac{gM_1m}{(O_1m)^3}\,\overrightarrow{mO_1} \quad \text{avec } O_1m \# \frac{\ell}{2}$$

de m'

$$\vec{F}_2 = \frac{gM_2m}{(O_2m)^3}\,\overrightarrow{m'O_2} \quad \text{avec } O_2m \# \frac{\ell}{2}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{gMm}{\left(\frac{\ell^3}{8}\right)}(\overrightarrow{mO_1} + \overrightarrow{m'O_2}) = \vec{0} \Rightarrow \underline{\text{couple}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = 2\times\frac{8\,gMm}{\ell^3}(\overrightarrow{Om}\wedge\overrightarrow{mO_1}) = \frac{16\,gMm}{\ell^3}\,\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\begin{vmatrix}-\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-\cos\alpha\\ -\sin\alpha\\ 0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \# -\frac{8gMm}{\ell}\times\theta\,\vec{u}_z}$$

Mouvement : $\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} + C\theta + 8\frac{gMm}{\ell}\theta = 0.$

soit la nouvelle période : $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{2}/(C + \frac{8}{\ell}gMm)}$

soit : $\boxed{g = \frac{\pi^2\ell^3}{4M}\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}\right)}$

<u>AN</u> : $T \simeq T_0$ d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{2C}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{8gMm}{\ell C}\right)$

$\Rightarrow T \simeq T_0\left(1 - \frac{4gMm}{\ell C}\right).$

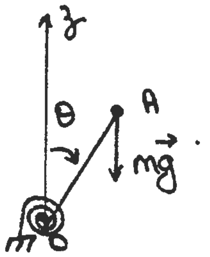
$\Rightarrow \frac{T - T_0}{T_0} = -\frac{4gMm}{\ell C}$ avec $C = \frac{m\ell^2}{2T_0^2}4\pi^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{T - T_0}{T_0} = -\frac{2gMT_0^2}{\ell^3\pi^2} = -4{,}6.10^{-3}}$ et $T = 238{,}6\,s.$

<u>Rmq</u> : c'est effectivement une méthode de mesure de g. En pratique il faut aussi tenir compte de l'influence de M_1 sur m' et M_2 sur m

MES 402

1°).



- Syst. à un degré de liberté : θ.
- énergie potentielle U du système :
$U = E_p(\text{poids}) + E_p(\text{ressort})$.

* $E_p(\text{poids})$: $\delta W_{poids} = -dE_p = -mg\,dz_A$ or $z_A = \ell\cos\theta$.

$\Rightarrow E_p(\text{poids}) = mg\ell\cos\theta + c^{te}$

* $E_p'(\text{ressort})$: $\delta W_{ressort} = -dE_p' = -C\theta \times d\theta$

$\Rightarrow E_p'(\text{ressort}) = \frac{1}{2}C\theta^2 + c^{te}$

$\Rightarrow U = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}C\theta^2 + c^{te}$ on choisit l'origine des E_p à $\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{U = mg\ell(-1 + \cos\theta) + \frac{1}{2}C\theta^2}$

$\left(\frac{dU}{d\theta}\right) = 0 \Leftrightarrow C\theta - mg\ell\sin\theta = 0.$ $\theta = 0$ est une position d'équilibre

$\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \left(C - mg\ell\cos\theta\right|_{\theta=0} = C - mg\ell$

$\boxed{\theta = 0 \text{ est stable si } C > mg\ell.}$

2°) <u>Intégrale première de l'énergie</u> : $E = E_c + U$ se conserve (liaisons parfaites et forces conservatives).

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgl(\cos\theta - 1) + \frac{1}{2}C\theta^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} - mgl\sin\theta + C\theta = 0.} \qquad \text{avec } J = ml^2$$

<u>θ petit</u>: $\ddot{\theta} + \frac{C - mgl}{ml^2}\theta = 0.$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{C - mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{C}{ml} - g}} \qquad G = \frac{C}{ml} \text{ et } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{G-g}}}$$

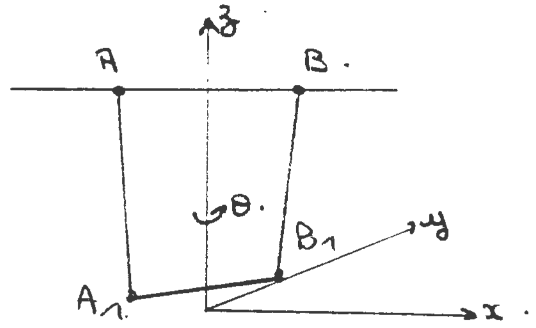
3°). on a $\frac{d(\ln T)}{dT} = \frac{\Delta T}{T} = \boxed{+\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{(G-g)}}$ (G est constant).

pendule simple: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{\Delta T_0}{T_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$.

<u>si $(G-g) \ll g$</u> : le syst. est bcp plus sensible qu'un pendule simple aux variations de g.

MES 403

1°).



$B_1 \left| \begin{array}{l} l\cos\theta \\ l\sin\theta \\ z. \end{array} \right.$ $\quad A_1 \left| \begin{array}{l} -l\cos\theta \\ -l\sin\theta \\ z. \end{array} \right.$

$B \left| \begin{array}{l} l \\ 0 \\ h. \end{array} \right.$

et $BB_1^2 = h^2 = (l)^2(\cos\theta - 1)^2 + (l)^2\sin^2\theta + (h-z)^2$

$\Rightarrow l^2 - 2l^2\cos\theta + l^2 - 2hz + z^2 = 0.$ θ petit, donc $z \ll h$.

au premier ordre en z: $z \simeq \frac{l^2}{2h}(2 - 2\cos\theta) \# \frac{l^2}{2h}\theta^2.$

$$\boxed{z \# \frac{l^2\theta^2}{2h}.}$$

2°) Système soumis à des liaisons sans frott^t et à des forces conservatives : <u>E est constante</u>.

$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ (Koenig). avec $J = \frac{1}{12}4l^2m = \frac{1}{3}ml^2$

$\dot{z} = \frac{2l^2}{2h}\dot{\theta}\theta \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^4}{h^2}\dot{\theta}^2\theta^2 \ll \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ (θ petit).

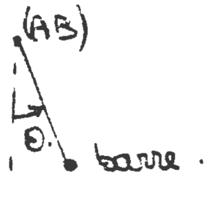
$U = E_p$ (poids) $= mgz + c^{te}$ $\quad E_p = 0$ à $z = 0 \Rightarrow U = \frac{mgl^2}{2h}\theta^2.$

$\Rightarrow E = E_0 = \frac{1}{3\times 2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{mgl^2}{2h}\theta^2$

en dérivant / à t ; avec $z = \frac{\ell^2}{2h}\theta^2$ il vient :

$\underline{\frac{1}{2}\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + \frac{mg\ell^2}{h}\theta = 0}$ d'où $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{3g}}}$

3°) <u>Oscillations de la barre autour de AB</u> : pendule simple de longueur h. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$



$\Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{3}}}$

Méthode de Timochenko [redacted]

1.a. (O, $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, $\mathbf{u_z}$), avec $\mathbf{u_x}$ horizontal et $\mathbf{u_z}$ vertical ascendant. On pose $\mathbf{OG} = x.\mathbf{u_x}$, $x \in [-\ell, \ell]$,

$\mathbf{T_1} = T_1.\mathbf{u_x}$, $\mathbf{N_1} = N_1.\mathbf{u_z}$, $\mathbf{T_2} = T_2.\mathbf{u_x}$, $\mathbf{N_2} = N_2.\mathbf{u_z}$.

$m\ddot{x} = T_1 + T_2$; $m\ddot{z} = -m.g + N_1 + N_2 = 0$; $|T_1| = f.N_1$; $|T_2| = f.N_2$. $|T_1| + |T_2| = f.m.g$.

$\Gamma_{G,\mathbf{N2}} + \Gamma_{G,\mathbf{N1}} = \mathbf{0}$ donne $N_1(\ell + x) - (\ell - x)N_2 = 0$.

$N_2 = \dfrac{1}{2}m.g(1 + \dfrac{x}{\ell})$, $N_1 = \dfrac{1}{2}m.g(1 - \dfrac{x}{\ell})$, $|T_1| = \dfrac{1}{2}f.m.g(1 - \dfrac{x}{\ell})$ et $|T_2| = \dfrac{1}{2}f.m.g(1 + \dfrac{x}{\ell})$.

1.b. $v_g(I_1) = (\dot{x} - r.\omega) < 0$ et $v_g(I_2) = (\dot{x} + r.\omega) > 0$ car $0 \leq |\dot{x}| \leq r.\omega$.

$T_1 = \dfrac{1}{2}f.m.g(1 - \dfrac{x}{\ell}) > 0$ et $T_2 = -\dfrac{1}{2}f.m.g(1 + \dfrac{x}{\ell}) < 0$. **1.c.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{f.g}}$.

[redacted]x[redacted]

.

[redacted] —

— [redacted]

Mouvement d'une barre

3.a. $\mathbf{R_1} = \mathbf{N_1} + \mathbf{T_1}$, $\mathbf{R_2} = \mathbf{N_2}$. $|\mathbf{T_1}| = f.|\mathbf{N_1}|$. $\mathbf{JG} = x.\mathbf{u_x}$, $x \in [a, 2a]$.

$\Delta E_c = W_{ext}$ donne $\dfrac{1}{2}m.v_f^2 - \dfrac{1}{2}m.v_0^2 = -\int_a^{2a} T_1.dx$ ou $\dfrac{1}{2}m.v_0^2 = \int_a^{2a} T_1.dx$.

Le TMC en J donne $-m.g.x + 2a.N_1 = 0$. $N_1 = m.g\dfrac{x}{2a}$ et $T_1 = f.m.g\dfrac{x}{2a}$. $v_0 = \sqrt{\dfrac{3f.g.a}{2}}$.

3.b. $\ddot{x} + \dfrac{f.g}{2a}x = 0$. Avec $\Omega^2 = \dfrac{f.g}{2a}$, $x(t) = a.\cos(\Omega.t) + \dfrac{v_0}{\Omega}.\sin(\Omega.t)$.

$x(t_0) = 2a$ et $v(t_0) = 0$ donnent : $\sin(\Omega.t_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{f.g}}$

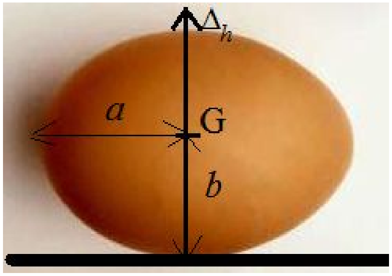
[redacted]

[redacted] — — —

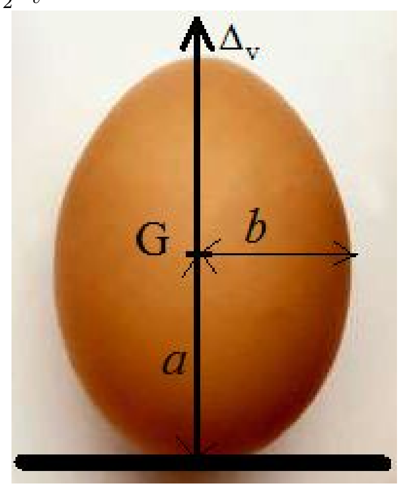
Résolution de problème
L'œuf dur en rotation
Exemple de résolution

On note a le demi grand axe et b le demi petit axe de l'œuf dur, et G son centre d'inertie qu'on considère au centre de l'œuf si ce dernier est homogène, de masse volumique $\mu \approx 1,0 \times 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur $m\,g\,z_G$ et cinétique $\frac{1}{2}J\,\omega^2$. Deux cas sont à considérer :

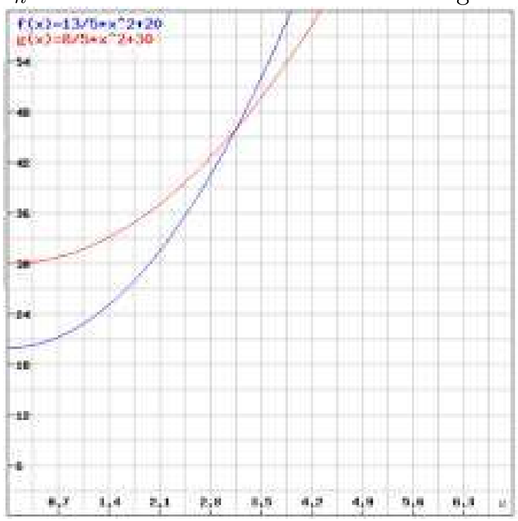
– soit l'œuf dur est mis en rotation autour de son petit axe (noté Δ_h), avec le moment d'inertie J_h et l'énergie mécanique est $E_h = m\,g\,b + \frac{1}{2}J_h\,\omega^2$;



– soit l'œuf dur est mis en rotation autour de son grand axe (noté Δ_v), avec le moment d'inertie $J_v < J_h$ et l'énergie mécanique est $E_v = m\,g\,a + \frac{1}{2}J_v\,\omega^2$.



L'allure des deux courbes E_v et E_h en fonction de ω est donnée sur la figure :



On voit que $E_v < E_h$ (donc l'œuf dur se relève) si $\omega > \omega_c$, tel que

$$m\,g\,a + \frac{1}{2}J_v\,\omega_c^2 = m\,g\,b + \frac{1}{2}J_h\,\omega_c^2$$

soit

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2m\,g\,(a-b)}{J_h - J_v}}$$

Pour la version expert :
On peut évaluer le rayon (le plus faible) à $b \approx 2,25$ cm, la hauteur à $a \approx 3,25$ cm.
Le moment d'inertie vertical est tel que $\frac{J_v}{m} < \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{12} = 2,15 \times 10^{-4}$ m^2.
Le moment d'inertie horizontal est tel que $\frac{J_h}{m} > \frac{2\,b^2}{5} = 2,02 \times 10^{-4}$ m^2 et $\frac{J_h}{m} < \frac{2\,a^2}{5} = 4,23 \times 10^{-4}$ m^2.
On pourrait prendre : $\frac{J_h}{m} \approx 3 \times 10^{-4}$ m^2 et $\frac{J_v}{m} \approx 2 \times 10^{-4}$ m^2, soit

$$\omega_c \approx \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 1 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-4}}} = 66 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit 10 tours par seconde, ce qui semble possible à faire à la main, bien que difficile.