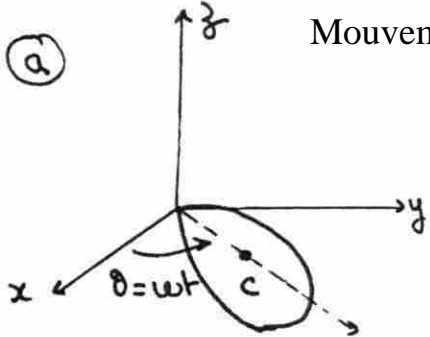


Mouvement d'un point sur un cerceau



le vect de P est entièrement défini par φ(t).

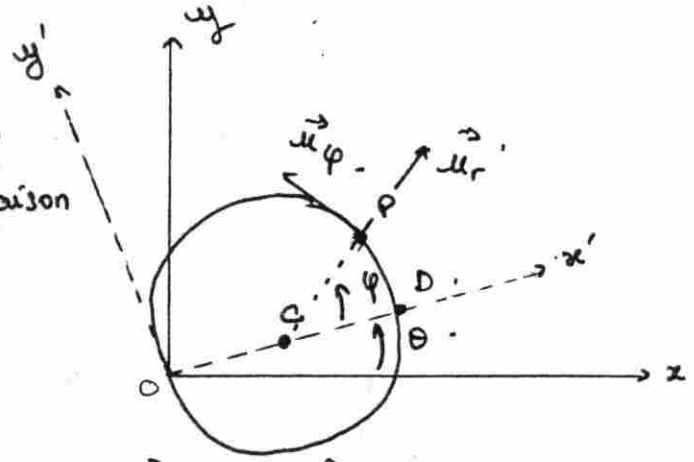
\* régl.: lié au cercle, non galiléen  
 \* forces:  $m\vec{g}$ ,  $-m\vec{\sigma}_e$ ,  $-m\vec{\sigma}_c$ ,  $\vec{L}$  liaison

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \varphi \vec{u}_{x'} + \sin \varphi \vec{u}_{y'} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_{x'} + \cos \varphi \vec{u}_{y'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_x = \cos \omega t \vec{u}_{x'} - \sin \omega t \vec{u}_{y'} \\ \vec{u}_y = \sin \omega t \vec{u}_{x'} + \cos \omega t \vec{u}_{y'} \end{cases}$$

$$\vec{\sigma}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) = -\omega^2 \vec{OP} \quad \text{avec } \vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$

$$\vec{\sigma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rP} \quad \text{avec } \vec{v}_{rP} = R\dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$



soit dans le système  $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_z)$ :

$$\vec{\sigma}_e = \begin{pmatrix} -\omega^2 R (1 + \cos \varphi) \\ -\omega^2 R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma}_c = \begin{pmatrix} -2R\omega\dot{\varphi} \cos \varphi \\ -2R\omega\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_r = \left( \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{R'} = -R\dot{\varphi}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R\ddot{\varphi} \sin \varphi \\ -R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ 2 équ. diff.:

$$\begin{cases} -R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R\ddot{\varphi} \sin \varphi = R\omega^2 (1 + \cos \varphi) + 2R\omega\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{Lx'}{R} & (1) \\ -R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi} \cos \varphi = R\omega^2 \sin \varphi + 2R\omega\dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{Ly'}{R} & (2) \\ 0 = -mg + L_z & \end{cases}$$

or la liaison est sans frottement ⇒  $\vec{L} \perp$  au support (cercle)

$$\Rightarrow \vec{L} = L\vec{u}_r + L_z \vec{u}_z \Rightarrow \begin{cases} Lx' = L \cos \varphi \\ Ly' = L \sin \varphi \end{cases}$$

(b) Positions d'équilibre:  $\dot{\varphi} = 0 \quad \ddot{\varphi} = 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} mR\omega^2 (1 + \cos \varphi) + L \cos \varphi = 0 \\ mR\omega^2 \sin \varphi + L \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = -R\omega^2 m \frac{(1 + \cos \varphi)}{\cos \varphi} \quad (\cos \varphi \neq 0) \\ \sin \varphi \left( -\frac{R\omega^2 m}{\cos \varphi} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = 0$$

2 positions d'équilibre:  $\begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$

Stabilité: si on écarte le point de la position d'équilibre on aura les 2 équas. diff (1) et (2) avec  $Lx' = L\omega\varphi$   
 $Ly' = L\sin\varphi$ .

$$(1) - (2) \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\omega \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi - 1)}$$

si  $\varphi = \varepsilon(t) \ll 1$ .  $\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega \varepsilon = 0 \rightarrow$  eq. harmonique  
 $\rightarrow$  eq. stable

si  $\varphi = \pi + \varepsilon(t)$   
 $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} = \omega \frac{(\varepsilon)}{-1(-1)}$  au 1<sup>er</sup> ordre en  $\varepsilon$   
 $\Rightarrow$  eq. hyperbolique  
 $\rightarrow$  eq. instable

(c) Th. de l'énergie cinétique (dans la réf. du cercle).

$$E_c(D) - E_c(O) = W_{OD} \quad \text{travail des forces de } O \text{ à } D.$$

la seule force travaillant est  $\vec{f}_e$  ( $\vec{L}$  ne travaille pas car réaction sans frottement et  $\vec{f}_c$  ne travaille jamais car  $\vec{f}_c \perp \vec{v}_{rP}$  "par construction")

$$\delta W = \int_e \vec{f}_e \cdot d\vec{l} \quad d\vec{l} = R d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \delta W = m\omega^2 R^2 d\varphi \quad \Rightarrow W_{OD} = m\omega^2 R^2 [\varphi(O) - \varphi(D)] = \pi R^2 \omega^2 m$$

$$= \frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_O^2 \stackrel{=0}{=}$$

$$\Rightarrow \underline{v_D = \sqrt{2\pi} R \omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{v}_{rD} = \sqrt{2\pi} R \omega \vec{u}_\varphi}$$

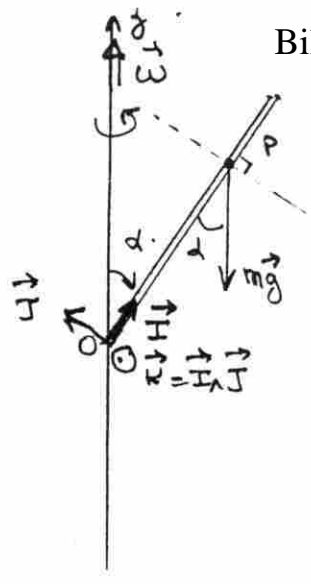
$$\vec{v}_{oD} \text{ (vitesse par rapport à la terre)} = \vec{v}_{rD} + \vec{v}_e = \sqrt{2\pi} R \omega \vec{u}_\varphi + \underbrace{\omega \wedge OD}_{2R\omega \vec{u}_x}$$

$$\vec{v}_{oD} = 2R\omega (1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi) \vec{u}_y + \sqrt{2\pi} R \omega \vec{u}_x$$

$$\underline{\vec{v}_{oD} = R\omega \left[ (-2\sin \omega t - \sqrt{2\pi} \sin(\omega t + \varphi)) \vec{u}_x + (\sqrt{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) - 2\cos \omega t) \vec{u}_y \right]}$$

Bille dans un tube

a



- pfd dans le réf. tournant non galiléen
- forces:  $m\vec{g}$ ,  $\vec{L}$  liaison ( $\perp$  à la tige car pas de frottements)

- équilibre relatif:

$$m\vec{g} + \vec{L} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}_\wedge (\vec{\omega}_\wedge \vec{OP}) \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad \vec{OP} = x \vec{i}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \omega^2 x \sin^2 \alpha (\cos \alpha \vec{j} - \sin \alpha \vec{i}) \\ m\vec{g} = -mg \cos \alpha \vec{i} - mg \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{L} = L \vec{j} + L' \vec{k} \end{cases}$$

⇒ équilibre: sur  $\vec{i}$  ou  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$  →

$$x_{eq} = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

sur  $\vec{j}$ :

$$L = mg / \sin \alpha$$

$$dx = x_{eq}$$

Stabilité

1<sup>o</sup> méthode: méthode des forces

on écarte P de  $x_{eq}$  de  $\Delta x \ll x_{eq}$ : on projette le pfd sur  $\vec{i}$

$$-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha = m\ddot{x} \quad \text{car } \vec{a}_e = 2\vec{\omega}_\wedge \vec{v}_{rP} \perp \vec{i}$$

⇒  $\ddot{x} + \omega^2 \sin^2 \alpha x = -g \cos \alpha$  → "équation hyperbolique"  
 → équilibre instable.

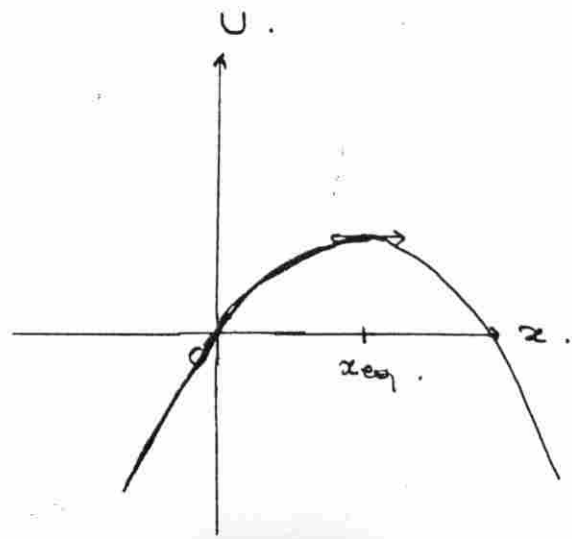
2<sup>o</sup> méthode: énergie potentielle

$$U = E_p (\text{pesanteur}) + E_p (\text{entraînement})$$

$$-\frac{dU}{dx} = -mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha \Rightarrow U(x) = mgx \cos \alpha + \frac{m\omega^2 \sin^2 \alpha}{2} x^2$$

car on choisit la position P=0 comme origine des énergies potentielles

⇒  $x_{eq}$  est un maximum de U  
 → instable.



b) on reprend le pfd dans le ref. tournant à  $\frac{\omega}{2}$   
 pfd dans le référentiel tournant  $(R') = (0, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$$m\vec{\sigma}_r = -m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c + m\vec{g} + \vec{L}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{\omega^2}{4} x \sin^2 d (\cos d \vec{J} - \sin d \vec{I})$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_p = -\dot{x} \omega \sin d \vec{K}$$

en projection sur  $\vec{I}$  :

$$-mg \cos d + m \frac{\omega^2}{4} x \sin^2 d = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} - \frac{\omega^2}{4} \sin^2 d x = -g \cos d.}$$

$$\text{ou } \Omega = \frac{\omega \sin d}{2}$$

$$x(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} + \frac{4g \cos d}{\omega^2 \sin^2 d}$$

$$t=0: \quad x = x_{eq} \\ \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow A - B = 0$$

$$A + B + \frac{4g \cos d}{\omega^2 \sin^2 d} = x_{eq} = \frac{g \cos d}{\omega^2 \sin^2 d}$$

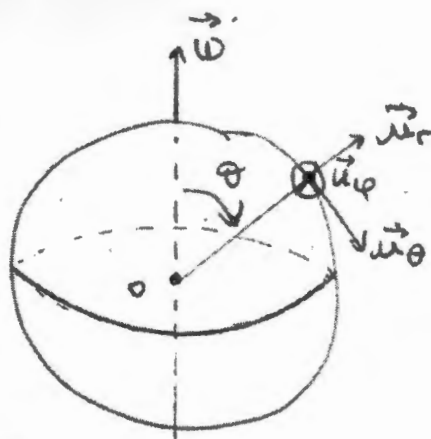
$$\Rightarrow A = -\frac{3}{2} \frac{g \cos d}{\omega^2 \sin^2 d}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{g \cos d}{\omega^2 \sin^2 d} [4 - 3 \cosh \Omega t]}$$

$$\text{tant que } t > \frac{0,795}{\Omega} = \frac{\text{arsh } \frac{4}{3}}{\Omega}$$

le point P redescend exponentiellement vite vers 0.

MEP 012



$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda = 45^\circ$$

forces:

- pesanteur:  $m\vec{g}$
- action rails:  $\vec{F}_{RD}$
- coriolis:  $\vec{P}_{cl}$

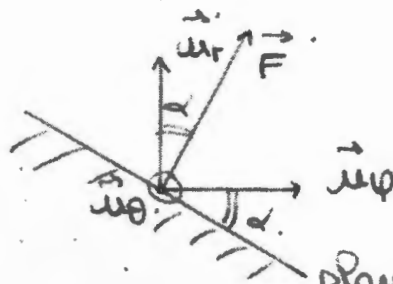
Si  $\vec{v} = \text{cte}$  dans le réf. terrestre :  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$-mg\vec{u}_r - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0 + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega} = \frac{2\pi}{J} [\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta]$$

D'où  $\vec{F} = +mg\vec{u}_r + 2m \frac{2\pi}{J} v_0 \cos\theta \vec{u}_\varphi$

vue de face : rail



plan des rails

Les rails doivent être inclinés vers l'Est d'un angle

$\alpha$  tel que

$$\tan\alpha = \frac{4\pi v_0 \sin\theta}{Jg}$$

$$= 7,6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\text{soit } 2'37''$$

## Indications :

### 3) Une horloge dans un ascenseur :

1) Appliquer la loi de la quantité de mouvement projetée sur la direction perpendiculaire à OM ; 2) Même principe mais en ajoutant la force d'inertie d'entraînement ; 3) il faut compter combien de période fait le balancier de l'horloge de l'ascenseur en 10 s ; dans le référentiel de l'escalier le balancier fait 10 périodes.

1)  $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  ; 2)  $T_+ = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g+a_o}}$  ; 3) le nombre de périodes que fait le balancier est

$N = 5 \left( \sqrt{1 + \frac{g}{a_o}} + \sqrt{1 - \frac{g}{a_o}} \right)$  ; par exemple pour  $a_o = 2 \text{ m.s}^{-2}$   $N = 1,98 * 5$  ; l'horloge de l'ascenseur a un balancier qui est plus lent, elle retarde.

### 5) Visite à la fête foraine :

1) Faire un bilan des forces agissant sur le point matériel dans le référentiel lié au rail; il y a la force d'inertie d'entraînement, la force de Coriolis, le poids et la réaction ; le mouvement étant sans frottement suivant  $\vec{u}_\theta$ , la réaction est dans le plan  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$  ; 2) faire un DL de la somme des force dans la direction  $\vec{u}_\theta$ .

1) En appliquant la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel lié au rail on obtient :  $m\omega^2(d \cos \theta + R) + 2m\omega R\dot{\theta} + R_r = -mR\dot{\theta}^2$  ;  $-dm\omega^2 \sin \theta = m\ddot{\theta}$  ;  $R_z - mg = 0$  ; la position d'équilibre relatif correspond à ;  $\sin \theta = 0$  ; cette position d'équilibre est stable car

$f'_\theta(\theta = 0) < 0$  ; 2)  $T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R}{d}}$ .

### 6) Régulateur de Watt :

Comme il s'agit uniquement d'une recherche de positions d'équilibre, il faut raisonner sur l'énergie potentielle du système ; pour cela introduire une énergie potentielle de la force d'inertie d'entraînement et tenir compte également de l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle du ressort ; paramétrer à partir d'un des angles entre les diagonales du losange et un côté ; la position d'équilibre stable correspond à un minimum de l'énergie potentielle totale.

$E_{p,inertie} = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$  pour chaque masse  $m$  ; en introduisant l'angle  $\alpha$  entre un côté et la

verticale,  $E_{p,inertie} = -\frac{m\omega^2 \sin^2 \alpha a^2}{2}$  ;  $E_{p,ressort} = \frac{1}{2} k(H - a \cos \alpha - l_o)^2$  ;  $E_{p,pesanteur} =$

$Mg(H - a \cos \alpha)$  ; soit  $E_p = -m\omega^2 \sin^2 \alpha a^2 + \frac{1}{2} k(H - a \cos \alpha - l_o)^2 + Mg(H - a \cos \alpha)$  ;

Les positions d'équilibre sont  $\alpha = 0$  et  $\cos \alpha = \frac{kH - kl_o + Mg}{2m\omega^2 a + ka}$  ; cette position d'équilibre existe si  $kH + Mg > kl_o$  et  $\frac{kH - kl_o + Mg}{2m\omega^2 a + ka} < 1$  ; dans ce cas elle est stable.

### 7) Deux particules sur un plateau :

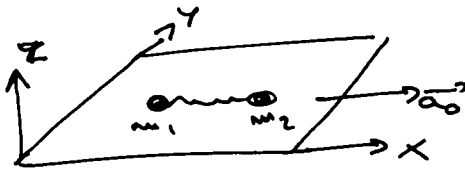
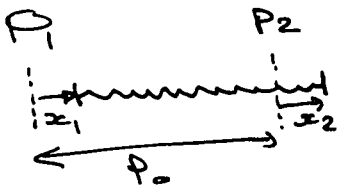
1) Appliquer la loi de la quantité de mouvement à chacun des points matériels ; résoudre en posant  $u(t) = x_2(t) - x_1(t)$  et  $X(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2}$  ; 2)  $u(t)$  n'est pas modifié ; on cherche  $x_1(t) = 0$ .

1)  $u(t) = l_o \cos \left( \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t \right) = l_o \cos \omega t$  ;  $x_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l_o \cos \omega t - \frac{1}{2} a_o t^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_o$  ;

$x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l_o \cos \omega t - \frac{1}{2} a_o t^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_o$  ; 2)  $a_o = \frac{m_2 l_o \omega^2}{m_1 + m_2}$  ;  $x_2(t) = l_o \cos \omega t$ .

# Particules sur un plateau.

(1)



sys: P1

ref: l'ce' à la plaque  $[0,1,x,y,z]$  non galiléen  $\vec{a}_{0'} = \vec{a}_0$   
 $\vec{\omega}_{R_e/R_0} = \vec{0}$

balg: poids  $\vec{P}$   
 réaction  $\vec{R}$

tension ressort  $\vec{T}_1 = k(p_0 - x_1 + x_2 - p_0) \vec{e}_x$

verif: si  $x_2 > 0$  et  $x_1 = 0$   
 c'est bien sur  $\vec{e}_x$

$\vec{F}_{ic} = \vec{0}$

$\vec{F}_{ie} = -m_1 a_0 \vec{e}_x$

pfal sur X:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 a_0 + k(x_2 - x_1) \quad (1)$$

sys: P2

ref: idem

balg:  $\vec{P}, \vec{R}, \vec{F}_{ic} = \vec{0}, \vec{F}_{ie} = -m_2 a_0 \vec{e}_x$

tension ressort:  $\vec{T}_2 = -k(p_0 - x_1 + x_2 - p_0) \vec{e}_x$

pfal sur X:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 a_0 - k(x_2 - x_1) \quad (2)$$

(1)+(2)  $\Rightarrow \frac{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2}{m_1 + m_2} = -a_0 \Leftrightarrow \ddot{X} = -a_0 \Leftrightarrow \dot{X} = -a_0 t$  car  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$   
 $\Rightarrow X = -a_0 \frac{t^2}{2} + p_0$  car  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  à  $t = 0$

(2) - (1)  $\Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -(\omega_1^2 + \omega_2^2)(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{u} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)u = 0$

$\Rightarrow u = A \cos(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t + \varphi)$

à  $t = 0$   $u = 0 \Rightarrow A = p_0$   
 $\dot{u} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$  }  $u = p_0 \cos(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t)$

donc  $x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} p_0 \cos \omega t - \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{m_2 p_0}{m_1 + m_2}$

$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_0 \cos \omega t - \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{m_2 p_0}{m_1 + m_2}$

(2) maintenant:  $\ddot{X} = -a_0 \cos \omega t \quad (1)'$

$\ddot{u} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)u = 0 \Rightarrow u = p_0 \cos \omega t \Rightarrow x_2 - x_1 = p_0 \cos \omega t$

or P1 ne bouge pas donc  $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = p_0 \cos \omega t$

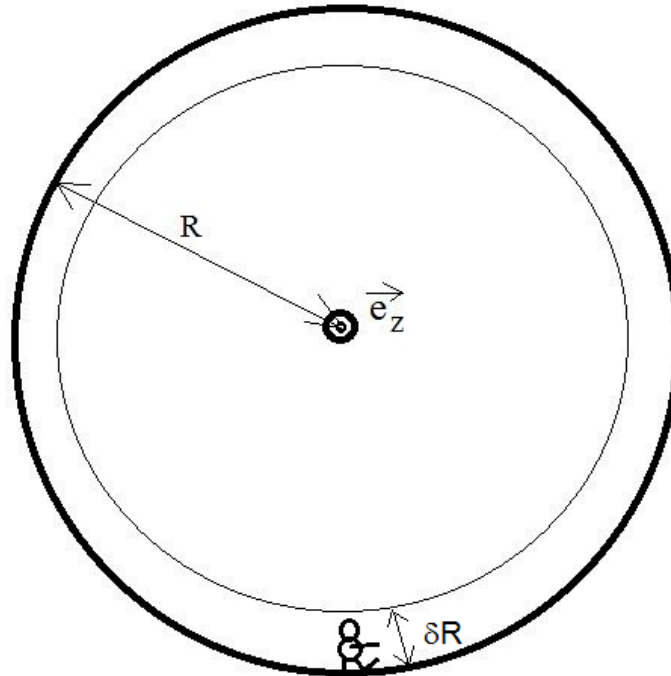
Dans (1)' avec  $\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow -\frac{m_2 p_0 \omega^2 \cos \omega t}{m_1 + m_2} = -a_0 \cos \omega t \Rightarrow a_0 = \frac{m_2 p_0 \omega^2}{m_1 + m_2}$

## Résolution de problème

# Le vaisseau spatial

### Exemple de résolution

- On nomme  $R$  le rayon du vaisseau spatial,  $Oz$  son axe, et le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$  ( $\omega > 0$ ).
- On pourra prendre  $\delta R \approx 1,75$  m (la distance entre les pieds et la tête).



- La pesanteur sur Terre est  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

#### Force d'entraînement

Dans le tore, il y a la force d'inertie d'entraînement qui vaut  $m R \omega^2$ . On cherche donc  $R \omega^2 = g$ , avec  $\frac{\delta R}{R} = 10\%$ .

D'où  $R = 17,5$  m. Ainsi  $\omega = \sqrt{\frac{9,81}{17,5}} = 0,75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une période de rotation de 8 s.

La comparaison avec les photos laisse entendre que le rayon est bien plus grand : la variation de la pesanteur artificielle est  $\frac{\delta R}{R} < 10\%$ .

NB : dans le film, le vaisseau spatial envoyé vers Jupiter contient une centrifugeuse de 6 mètres de rayon tournant à 3 tours par minute.

#### Force de Coriolis

Poole se déplace dans le vaisseau : il est soumis à la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{iC} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m \omega \vec{e}_z \wedge v_\theta \vec{e}_\theta = 2m \omega v_\theta \vec{e}_r$$

Si  $v_\theta > 0$ , c'est-à-dire si la vitesse de l'astronaute est dans le même sens que la vitesse du vaisseau (vitesse d'entraînement), l'astronaute semble alors plus lourd, comme soumis à une pesanteur  $g + \delta g$  avec

$$\delta g = 2 \cdot \omega \cdot v_\theta$$

Si  $v = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\delta g = 2 \times 0,56 \times \frac{10}{3,6} = 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  : il pèse 30% plus lourd !

Si au contraire  $v_\theta < 0$ , c'est-à-dire si la vitesse de l'astronaute est opposée à la vitesse du vaisseau (vitesse d'entraînement), l'astronaute semble alors moins lourd, comme soumis à une pesanteur  $g - \delta g$  avec

$$\delta g = 2 \cdot \omega \cdot |v_\theta|$$

Cas limite : si  $|v_\theta| = R\omega$ , l'astronaute est en apesanteur, car il est fixe dans un référentiel galiléen.

Pour plus d'informations :

<http://www.scilogis.fr/signal-sur-bruit/weightless-3-graviteartificielle-et-centrifugeuses/>