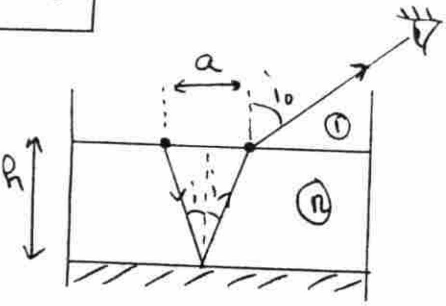
Corrigé planche n° 16.

OPT 101.



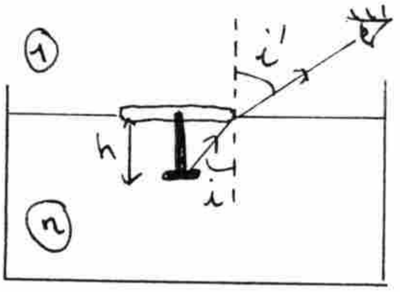
pour que l'image de ① coïncide avec ②, il faut que le rayon (dessiné) provenant de ① et se réfléchissant sur le mercure arrive en ② et que :

$$n \sin i = \sin i_0 .$$

or $\sin i = \dfrac{a}{2} \dfrac{1}{\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{1/2}} = \dfrac{a}{\sqrt{4h^2 + a^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{n = \sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^2}} \sin i_0} .$$

OPT 102.



Le clou est encore visible à la limite si le rayon provenant de la tête du clou, passant juste à la périphérie du disque, atteint l'œil de l'observateur

ce rayon a une incidence i telle que :

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

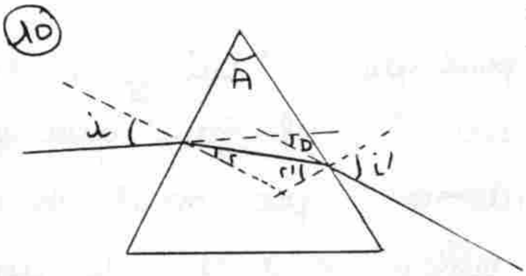
→ Si l'observateur regarde sous l'incidence i', on doit avoir $\underline{\underline{i' \geq i'_0}}$ tel que $\underline{\underline{\sin i_0 = n \sin i}} = \dfrac{nR}{\sqrt{R^2 + h^2}}$

→ il faut, en outre que $\dfrac{nR}{\sqrt{R^2+h^2}} \leq 1$.

Soit. $\boxed{h \geq R\sqrt{n^2 - 1} = 0{,}876\,R}$

OPT 103

1°)



$$\begin{cases} D = i + i' - A \\ r + r' = A \end{cases}$$

$\frac{dD}{di} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{di'}{di} = 0$ or $n \sin r = \sin i$

$\Rightarrow n \cos r \, dr = \cos i \, di$

et $dr = -dr'$

et $n \sin r' = \sin i'$

$\Rightarrow n \cos r' dr' = \cos i' di'$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r' = A/2 \\ i = i' = \frac{A + Dm}{2} \end{cases}$$

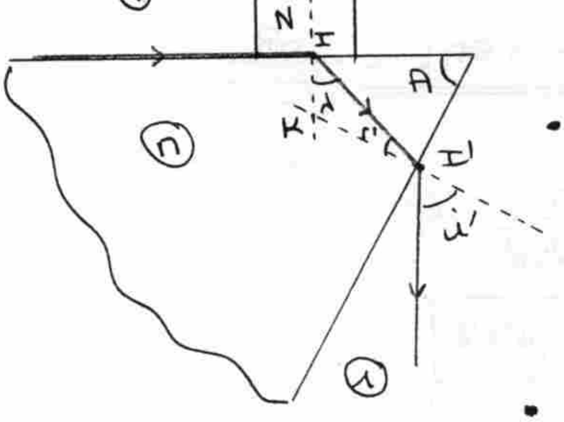
$$\Rightarrow \boxed{\sin \frac{A+Dm}{2} = n \sin \frac{A}{2}.}$$

et $\boxed{Dm = 2 \operatorname{Arsin}\left(n \sin\frac{A}{2}\right) - A}$

AN: $Dm = 46°16'$

Dm est obtenu pour $i_0 = \frac{A+Dm}{2} = 53°8'$

2°)



• $n \sin \alpha = N$

$\Rightarrow \alpha = \operatorname{Arcsin} \frac{N}{n}.$

• Dans le triangle $II'K$.

$\pi - A + \alpha + r' = \pi$

$\Rightarrow r' + \alpha = A$

D'où $r' = A - \alpha$.

• $\sin i' = n \sin r' = n \sin(A - \alpha)$.

$\Rightarrow N = n \sin \alpha = n \sin(-r' + A) = n\left[\cos r' \sin A - \sin r' \cos A\right].$

D'où $\boxed{N = \sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} - \cos A \sin i'}$ $\boxed{N = 1{,}28}$

39

a) Lorsque l'échantillon est posé sur la face plane :

pour obtenir un émergent en sortie, il faut que i' existe.

or avec les relations du (20) :

$$\sin i' = n \sin(A-\lambda) = n \sin\left(A - \text{Arcsin}\frac{N}{n}\right). \quad \left(\begin{array}{l}\lambda = 53°8' \\ \lambda = 53{,}13°\end{array}\right)$$

$$-1 \leq \sin i' \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \sin\left(A - \text{Arcsin}\frac{N}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\text{Arcsin}\frac{N}{n} - \text{Arcsin}\frac{1}{n} \leq A \leq \text{Arcsin}\frac{N}{n} + \text{Arcsin}\frac{1}{n}}$$

AN : $14°27' \leq A \leq 91°48'$

b) Lorsque l'on retire l'échantillon :

$$\lambda = \text{Arcsin}\frac{1}{n}$$

$$\sin i' = n \sin r' = n \sin(A-\lambda) = n \sin\left(A - \text{Arcsin}\frac{1}{n}\right).$$

$$-1 \leq \sin i' \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{0 \leq A \leq 2\,\text{Arcsin}\frac{1}{n}}.$$

$$0 \leq A \leq 77°21'$$

40

Avec l'échantillon : $\boxed{N = \sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i'_1} - \cos A \sin i'_1}$.

Sans échantillon : $\lambda = \text{Arcsin}\frac{1}{n} \qquad n = \frac{1}{\sin\lambda} = \frac{1}{\sin(A-r')}$.

$$\Rightarrow n = \frac{1}{\sin A \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2 i'_2} - \frac{\cos A \sin i'_2}{n}}$$

ce qui revient à remplacer N par 1 dans la relation ci-dessus.

$$\boxed{1 = \sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i'_2} - \cos A \sin i'_2}.$$

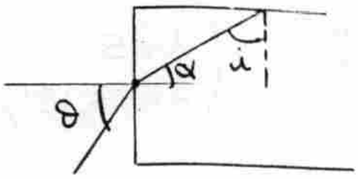
on en déduit $\boxed{n = \left[\sin^2 i'_2 + \frac{(1+\cos A \sin i_2)^2}{\sin^2 A}\right]^{1/2}}$

$\boxed{n = 1{,}686.}$

alors $\boxed{N = 1{,}185.}$

OPT 104

(1°) Il y a propagation à l'intérieur de la fibre si il y a réflexion totale sur la gaine : donc si $i > \text{Arcsin}\,\frac{n_2}{n_1}$.



$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - i < \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\,\frac{n_2}{n_1}$

or $n_0 \sin\theta = n_1 \sin\alpha < n_1 \cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{n_2}{n_1}\right)$

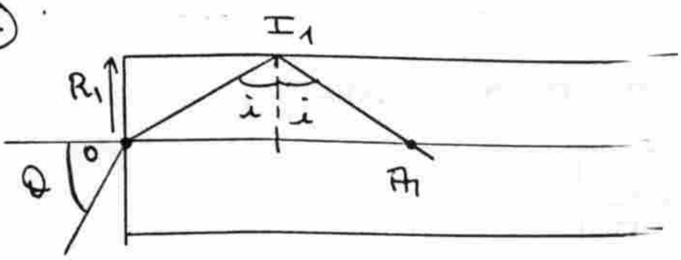
$< \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

$\Rightarrow \boxed{\theta \leq \theta_0 = \text{Arcsin}\,\frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$

AN : $\theta_0 = 15°54'$

(2°)

(a)

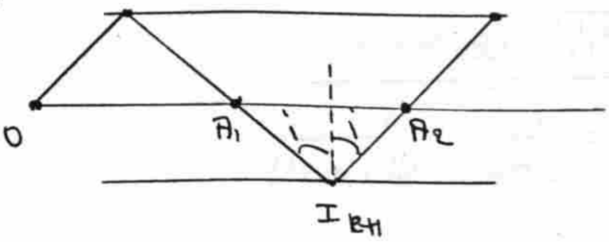


$L_1 = 2 n_1 OI_1 = \frac{2 n_1 R_1}{\cos i}$

or $n_1 \sin\alpha = n_1 \cos i = n_0 \sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{L_1 = \frac{2 n_1^2 R_1}{n_0 \sin\theta}}$

(b)



Sur la longueur ℓ de la fibre, il y a N trajets du type L.

$N = \frac{\ell}{OA_1} = \frac{\ell}{2R_1 \tan i} \Rightarrow L = \frac{\ell}{2R_1 \tan i} \cdot L_1$

$\Rightarrow L = \frac{\ell n_1}{\sin i}$ soit $\boxed{L = \frac{\ell n_1^2}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}}$

(3°)

(a) $\tau = \int_{\text{rayon}} \frac{ds}{c/n} = \frac{1}{c} L(\dots x)$.

Avec $L(0\to x) = \dfrac{n_1^2 x}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = \dfrac{n_1^2}{c}\dfrac{x}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2\sin^2\theta}}}$ 3

b $\quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \iff 0 \leq n_0^2 \sin^2\theta \leq n_0^2 \sin^2\theta_0$

$$\iff \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta_0} \leq \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta} \leq n_1$$

$$\iff \frac{n_1 x}{c} \leq \tau \leq \frac{n_1^2}{c}\frac{x}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta_0}}$$

or $n_0^2 \sin^2\theta_0 = n_1^2 - n_2^2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{n_1 x}{c} \leq \tau \leq \dfrac{n_1^2}{n_2 c} x \\ \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta\tau = \frac{n_1 x}{c}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)}$$

et $\boxed{\tau_0 = \dfrac{n_1 x}{c}}$

Pour $x = 2$ km : $\tau_0 = 10{,}1\ \mu s$.

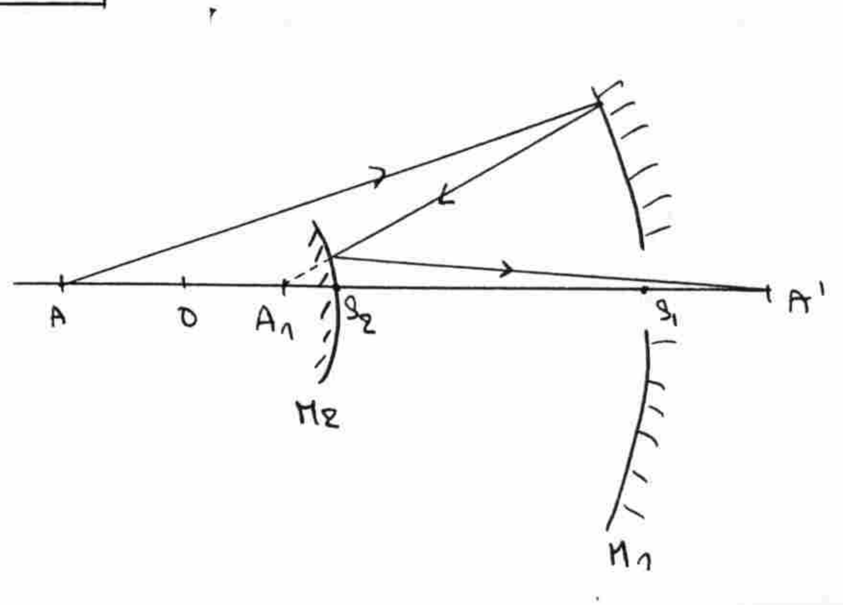
$\Delta\tau = 0{,}17\ \mu s$.

c Pour pouvoir séparer 2 impulsions consécutives, il faut qu'elles soient séparées dans le temps de plus de $\Delta\tau$: $T > \Delta\tau$, où $T = \frac{1}{f}$

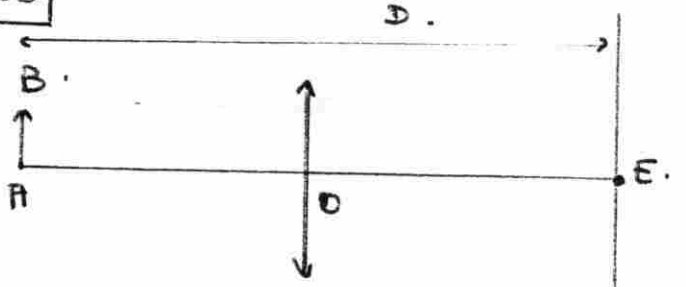
$\iff f < \dfrac{1}{\Delta\tau}$ d'où $\boxed{f_{max} = \dfrac{1}{\Delta\tau} = \dfrac{c}{x}\dfrac{n_2}{n_1(n_1-n_2)}}$ $\quad f_{max} = 5{,}9$ MHz

---

OPT 107



OPT 105



objet et image réels ⇒ la lentille doit être située entre les 2

$p = \overline{OA}$
$p' = \overline{OE}$ on a $\overline{AE} = D = \overline{AO} + \overline{OE} = -p + p' \Rightarrow p = p' - D.$

et relation de conjugaison : $-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p'-D} = \frac{1}{f'}$

$\Leftrightarrow \quad p'^2 - Dp' + f'D = 0$

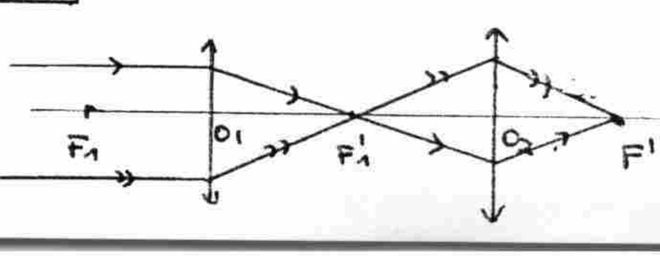
on doit avoir des solutions donc $\Delta = D^2 - 4f'D > 0.$

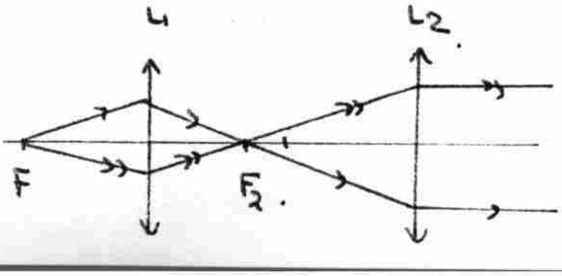
d'où l'image existe si $\boxed{f' < \frac{D}{4}}$

alors $\exists$ 2 solutions distinctes : $\begin{cases} p'_1 = \dfrac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \\ p'_2 = \dfrac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \end{cases}$

le grandissement $\gamma = \frac{p'}{p} < 0$ est, en valeur absolue, >1 pour l'une des racines (p'_1) et <1 pour l'autre (p'_2).

OPT 106.





F' foyer image du doublet
F — objet —

- F' doit être le conjugué de F'_1 dans la 2° lentille :

$$\boxed{\overline{F_2F'_1} \times \overline{F'_2F'} = -f'^2_2}$$ formule de Newton pour (F'_1, F').

or $\overline{F_2F'_1} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = +f'_2 + f'_1 - e$.

$$\Rightarrow \quad \overline{F'_2F'} = \frac{(f'_2)^2}{e - f'_1 - f'_2}.$$

- F doit être le conjugué de F_2 (objet associé à l'image F_2) dans la 1° lentille :

$$\boxed{\overline{F_1F} \times \overline{F'_1F_2} = -(f'_1)^2}$$ formule de Newton. pour (F, F_2).

$$\Rightarrow \quad \overline{F_1F} = \frac{-(f'_1)^2}{e - f'_1 - f'_2}$$

on veut avoir : $\overline{FF'} = 0 = \overline{FF_1} + \overline{F_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2F'}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f'^2_1}{e - f'_1 - f'_2} + f'_1 + e + f'_2 + \frac{(f'_2)^2}{e - f'_1 - f'_2} = 0.$$

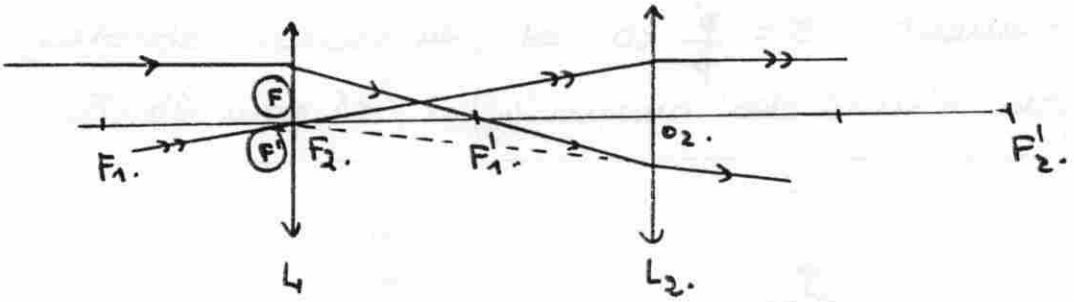
$$\Leftrightarrow \quad f'^2_1 + \left(e + (f'_1 + f'_2)\right)\left(e - (f'_1 + f'_2)\right) + f'^2_2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad f'^2_1 + f'^2_2 + e^2 - (f'_1 + f'_2)^2 = 0.$$

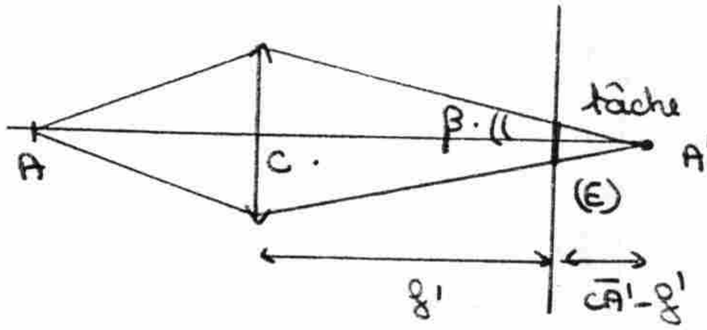
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{e^2 = 2f'_1f'_2} \quad \text{soit} \quad 4f'^2_1 = 2f'_1f'_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f'_2 = 2f'_1}$$

Construction : on a alors. $F = F' = F_2 = O_1$.



(3°) ouverture relative de l'objectif : $\frac{2R}{f'} = \frac{1}{n}$. $R = \frac{D}{2}$ rayon du diaphragme



mise au point sur l'∞ : $d = f'$

$$-\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{CA}} < \frac{1}{f'} \text{ car } \overline{CA}<0.$$

$\Rightarrow \overline{CA'} > f'$ A' est derrière (E)

$\Rightarrow$ A donne sur (E) une tâche centrée sur F'.

on a : $tg\beta = \frac{\rho}{\overline{CA'}-f'}$ ρ rayon de la tâche : $tg\beta = \frac{R}{\cancel{f'}+\overline{CA'}}$

pour que ρ soit inférieur à $\frac{g}{2}$ il faut éloigner A de L
il faut que AC soit supérieur à A_0C [ou que $\overline{CA}$ soit inférieur à $\overline{CA_0}$ (négatifs tous 2)].

avec $-\frac{1}{\overline{CA_0}} + \frac{1}{\overline{CA'_0}} = \frac{1}{f'}$ et $\frac{\overline{CA'_0} \cancel{+f}}{R} = \frac{\overline{CA'_0}-f'}{g/2}$.

$\Leftrightarrow \overline{CA'_0} = f'\,\frac{2R+g}{2R-g}$. d'où $\cancel{-\overline{CA_0} = f'\,\frac{2R+g}{2g}} = CA_0 \# f'\frac{2R}{g}$.

soit $\boxed{CA_0 = \frac{f'^2}{ng}}$.

AN. $n = 2,8$ petite ouverture

$CA_0 = 158\,m$.

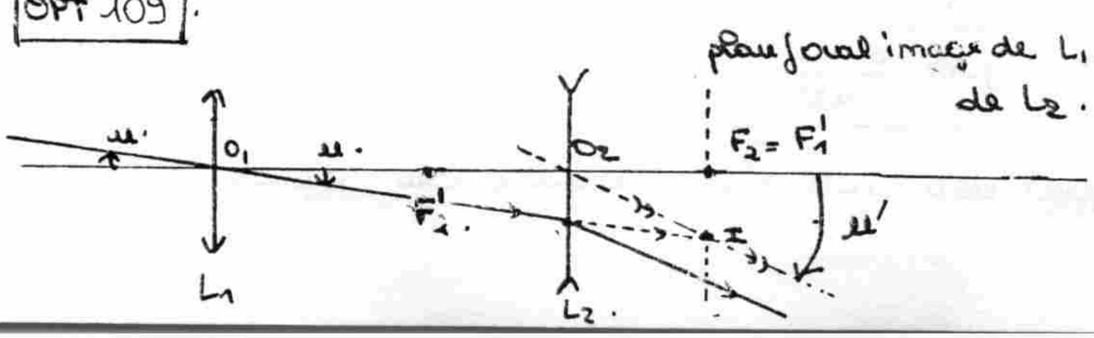
$n = 11$ grande ouverture

$CA_0 \simeq 28\,m$.

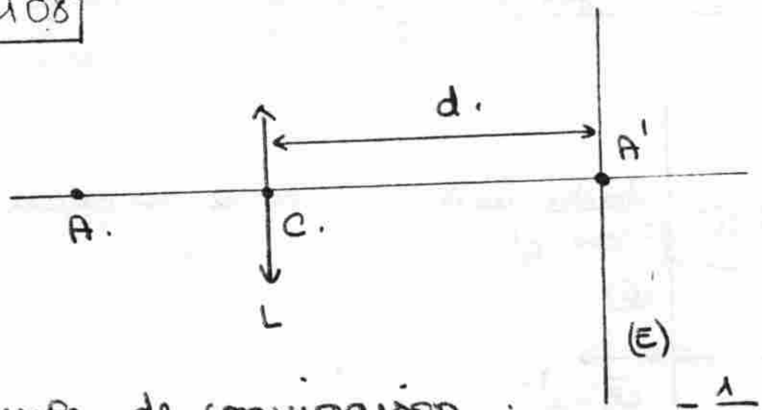
→ la profondeur de champ augmente si on diaphragme.

OPT 109.

plan focal image de L_1 = plan focal objet de L_2.



1°



Formule de conjugaison : $-\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{f'}$

avec $\overline{CA} < 0$ et $\overline{CA'} > 0$.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{f'}$

soit $x_0 = 1,20\,m$.

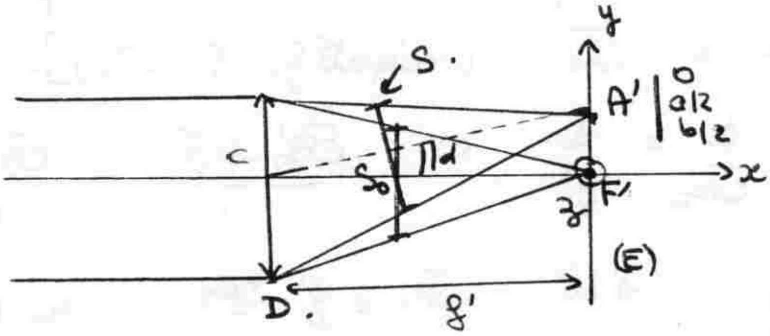
$-\infty \leq \overline{CA} \leq -x_0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x_0} \leq \frac{1}{\overline{CA}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f'} - \frac{1}{x_0} \leq \frac{1}{\overline{CA'}} \leq \frac{1}{f'}$

$\Leftrightarrow |f'| \leq |\overline{CA'}| \leq \left|\frac{f' x_0}{x_0 - f'}\right|$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{55\,mm \leq d \leq 57{,}6\,mm}$.

2°



angles solides

$\Omega_0 = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{d^2} \quad \Omega_1 = \frac{\frac{\pi D^2}{4}\cos\alpha}{CA'^2}$

$\Rightarrow \frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{d^3}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + d^2}^{\,3}}$

$= 0{,}805$

Mise au point sur à l'infini : $d = f' = 55\,mm$.

Centre du rectangle : foyer principal image

A' : foyer secondaire (un des sommets du rectangle).

S_0 correspondant à F' (section droite) :

S correspondant à A' : $\quad S = S_0 \cos\alpha = S_0 \frac{f'}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + f'^2}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{S}{S_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 + b^2}{4f'^2}}}}$ $\quad$ AN : $\frac{S}{S_0} = 0{,}923$.

c'est le rapport des intensités lumineuses reçues en F' et en A'.

Pour montrer que le système est afocal, il faut montrer que, un faisceau incident parallèle (faisant un angle u qcq avec l'axe) ne converge pas à la sortie de L_2 mais reste un faisceau parallèle incliné d'un angle u'.

car : • le faisceau incident devrait converger en un point I du plan focal image de L_1 qui est alors un objet virtuel pour L_2

• or ce point est un point du plan focal objet de L_2 : les rayons issus de ce point forment donc un faisceau parallèle d'inclinaison u'.

⇒ <u>le système est donc afocal.</u>

<u>grossissement</u> : $G = \frac{u'}{u}$ $\quad u \simeq \frac{\overline{F'_1 I}}{O_1} = \frac{\overline{F'_1 I}}{f'_1}$ (car u petit)

$u' \simeq \frac{\overline{F'_1 I}}{-f'_2}$ (car u' petit)

(avec le rayon passant par O_2 qui n'est pas dévié),
u et u' petits dans l'approximation de Gauss.

⇒ $\boxed{G = -\frac{f'_1}{f'_2}}$ <u>AN :</u> <u>$G = 4$</u> c'est assez faible !

Résolution de problème
Le microscope
Exemple de résolution

niveau initiation

S'approprier :
- la longueur d'onde est $\lambda \approx 0,5$ μm
- le diamètre de l'objectif est $D \approx 1$ cm
- la distance objectif - objet est $d \approx 1$ cm

Analyser :
L'angle limite dû à la diffraction est $\theta_d \approx \frac{\lambda}{D}$.

Réaliser :
La limite de résolution due à la diffraction est

$$x_{diffraction} \approx \theta_d \, d \approx \frac{\lambda \, d}{D} \approx 0,5 \; \mu\text{m}$$

Valider :
La limite de résolution angulaire du microscope due à la diffraction est

$$\theta_d \approx \frac{\lambda}{D} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ rad} 5 \times 10^{-5} \frac{180 \times 60}{\pi} = \; 0,17'$$

qui est plus faible que $1'$ (cas de l'œil nu).

niveau confirmé

S'approprier :
- la limite de résolution angulaire de l'œil est $\alpha_{oeil} = 1'$ qui correspond à un objet de taille x vu à une distance $d_{pp} = 25$ cm (distance de l'oeil au *punctum proximum*),
- un objet vu sous un angle α_0 à l'oeil nu est vu à travers le microscope avec un angle $\alpha = G \, \alpha_0$ avec $G = 60$.

Analyser :
La limite de résolution angulaire est donc divisée par $G = 60$ grâce au microscope. Si on est à la limite de résolution angulaire de l'oeil, alors $\frac{\alpha_{oeil}}{G} = \frac{x_{oeil}}{d_{pp}}$.

Réaliser :
La limite de résolution due à l'oeil est

$$x_{oeil} \approx \frac{\alpha_{oeil}}{G} d_{pp} = \frac{1}{60} \times 1 \times \frac{\pi}{180 \times 60} \times 0,25 \approx 1,2 \; \mu\text{m}$$

Valider :
La limite de résolution angulaire de l'oeil qui est $1'$, donne pour l'œil nu une limite de résolution (le *punctum proximum* étant pris égal à 25 cm) :

$$x_0 \approx \frac{\pi}{180 \times 60} \times 0,25 = 72 \; \mu\text{m}$$

qui est (60 fois) plus grand que x_{oeil}.

niveau expert

S'approprier :

– la limite de résolution angulaire de l'œil est $1'$,
– un objet vu sous un angle α_0 à l'oeil nu est vu à travers le microscope avec un angle $\alpha = G\,\alpha_0$ avec $G = 60$,
– la longueur d'onde $\lambda \approx 0,5\ \mu$m
– le diamètre de l'objectif $D \approx 1$ cm
– la distance objectif - objet $d \approx 1$ cm

Analyser :

– L'angle limite dû à la diffraction est $\theta_d \approx \frac{\lambda}{D}$, qui correspond à une taille $x_{diffraction} \approx \theta_d\, d$.
– La limite de résolution angulaire est donc divisée par $G = 60$ grâce au microscope. Si on est à la limite de résolution angulaire de l'oeil, alors $\frac{\alpha_{oeil}}{G} = \frac{x_{oeil}}{d_{pp}}$.

Il s'agira de comparer les deux limites, celle due à l'œil et celle due à la diffraction du microscope.

Réaliser :

La limite de résolution due à l'oeil est

$$x_{oeil} \approx \frac{\alpha_{oeil}}{G} d_{pp} = \frac{1}{60} \times 1 \times \frac{\pi}{180 \times 60} \times 0,25 \approx 1,2\ \mu\text{m}$$

La limite de résolution due à la diffraction est

$$x_{diffraction} \approx \theta_d \times d \approx \frac{\lambda \times d}{D} \approx 0,5\ \mu\text{m}$$

Valider :

La limite de résolution angulaire de l'oeil qui est $1'$, donne pour l'œil nu une limite de résolution (le *punctum proximum* étant pris égal à 25 cm) :

$$x_0 \approx \frac{\pi}{180 \times 60} \times 0,25 = 72\ \mu\text{m}$$

On a $x_0 > x_{oeil} > x_{diffraction}$. Ce qui limite la résolution, c'est donc la résolution de l'oeil et

$$x_{limite} = x_{oeil} \approx 1\ \mu\text{m}$$