Moment cinétique

On va définir un nouvel outil vectoriel : le moment cinétique

I Moment d'une force

1 Par rapport à un point O

Soit M un point matériel soumis à une force $\vec{F}$ le moment de cette force $\begin{cases}\text{par rapport} \\ \text{en}\end{cases}$ O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) := \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

remq

$$\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\| = OM \cdot F \cdot |\sin(\vec{OM}, \vec{F})|$$

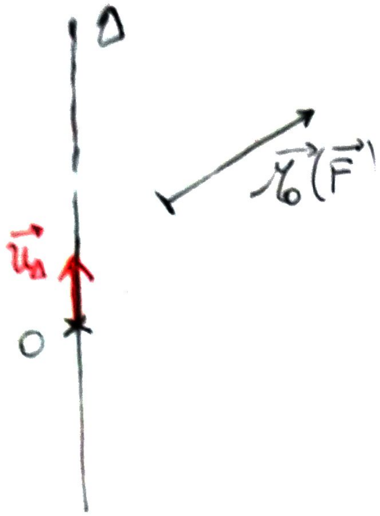
remq

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \perp \vec{OM}$$
$$\perp \vec{F}$$

remq

$\vec{F}$ passe par O $\Rightarrow \vec{F} \parallel \vec{OM} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

2 Par rapport à un axe fixe Δ passant par O



$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ = projection $/\Delta$ de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

$$:= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

1er cas ($\vec{F} /\!/ \Delta$)

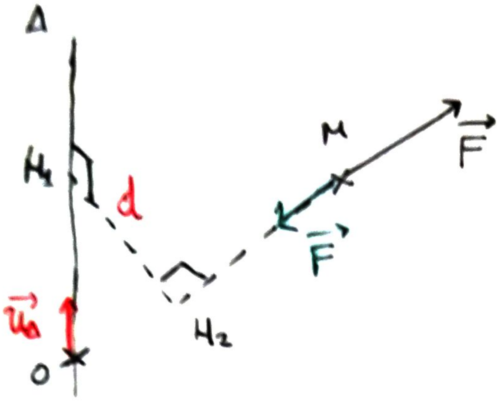
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}_{\perp \vec{F}} \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= 0$$

2e cas ($\vec{F}$ passe par Δ)

VUE DESSUS

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= \vec{0} \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= 0$$

3ᵉ cas ($\vec{F} \perp \Delta$)



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta}$$
$$= \vec{OM} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u_\Delta}$$
$$= (\vec{OH_1} + \vec{H_1H_2} + \vec{H_2M}) \wedge \vec{F} \cdot \vec{u_\Delta}$$
$$= (\vec{H_1H_2} \wedge \vec{F} + \cancel{\vec{OH_1} \wedge \vec{F}} + \cancel{\vec{H_2M} \wedge \vec{F}}) \cdot \vec{u_\Delta}$$

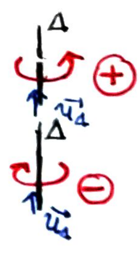
$\perp \vec{F} \perp \vec{OH_1} \parallel \vec{u_\Delta}$

$\vec{H_2M} \parallel \vec{F}$

$$= \vec{H_1H_2} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u_\Delta}$$
$$= H_1H_2F\, \vec{u_\Delta} \cdot \vec{u_\Delta}$$
$$= H_1H_2F$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -H_1H_2F$$

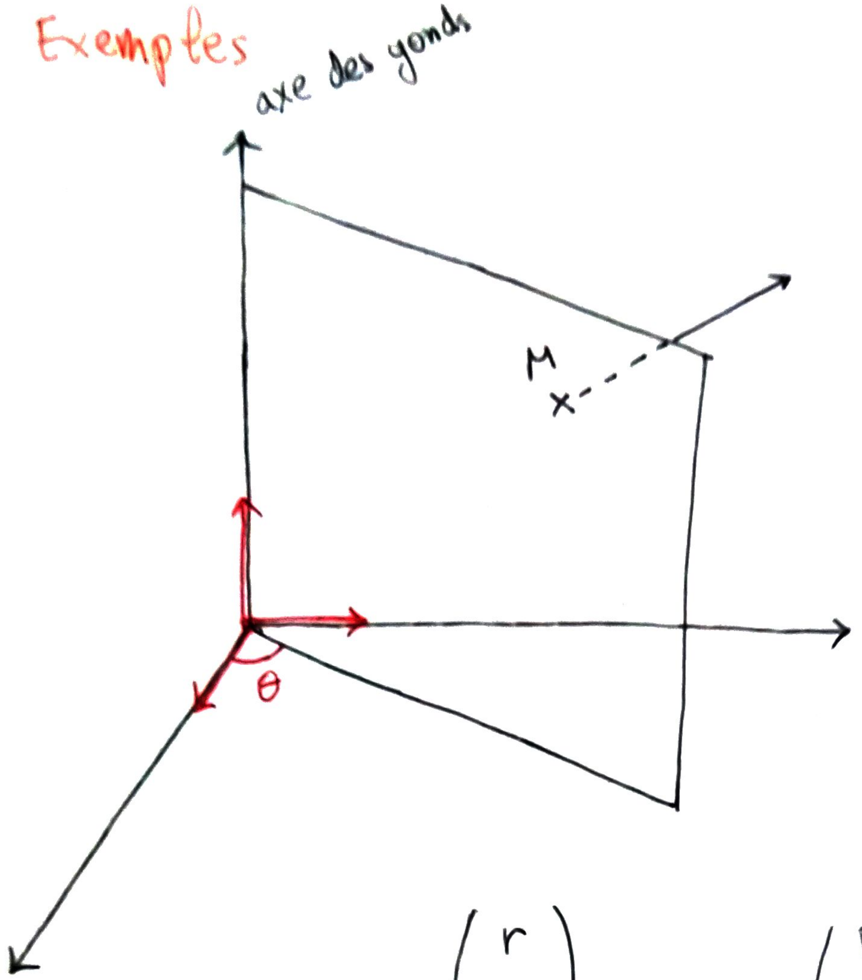
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm dF \begin{cases} + \Rightarrow \text{sens direct} \\ - \Rightarrow \text{sens indirect} \end{cases}$$



def Bras de levier

$d := H_1H_2$ distance entre
- axe
- droite d'action i.e. qui porte F

4 Exemples



$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{F} := \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -zF_\theta \\ zF_r - rF_z \\ rF_\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = \mathcal{M}_O(\vec{F}) \cdot u_z = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = rF_\theta}$$

L'effet de la force qui cherche à mettre en rotation la porte est important :

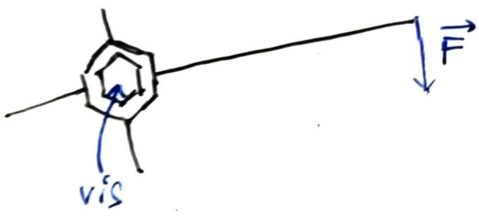
- Si elle est appliquée loin de l'axe (bras de levier important)
- Si elle est appliquée perpandiculairement à la porte

5 Utilité

Le moment est un outil vectoriel ou scalaire très utile pour les rotations.

<u>ex</u>

-  balançoire

- 

On augmente le bras de levier pour diminuer $\|\vec{F}\|$

II Moment cinétique d'un point M

1 Par rapport à un point O

def Moment cinétique de M par rapport au point O

$$\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}) := \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}(M/\mathcal{R})$$
$$= \boxed{\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})}$$

remq Dépend du réf

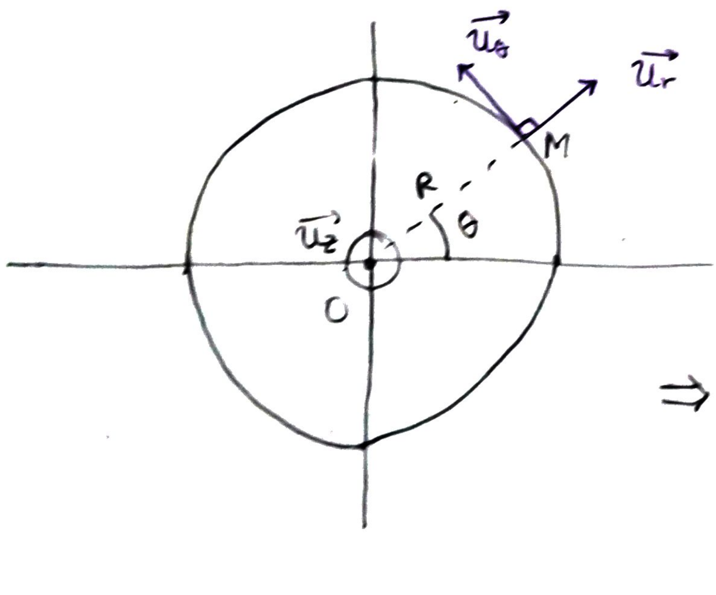
2 Par rapport à un axe fixe

def Moment cinétique de M par rapport à l'axe Δ

$$\boxed{L_\Delta(M/\mathcal{R}) := \overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

3 Exemple de calcul

Soit M en rotation autour de O



$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = \cancel{\dot{R}\overrightarrow{u_r}} + R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

R constant

$$\Rightarrow \overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

$$L_{Oz}(M/\mathcal{R}) = \vec{L_O}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{u_z}$$

$$= mR^2\dot{\theta}$$

III Théorème du moment cinétique TMC

1 En un point fixe O

<u>dem</u>

$$\dot{\vec{L_O}}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}(\vec{OM} \wedge m\vec{v})$$

$$= \cancel{\dot{\vec{OM}} \wedge m\vec{v}} + \vec{OM} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$$= \vec{OM} \wedge m\vec{a} \quad \text{si masse constante}$$

$$= \vec{OM} \wedge \vec{F} \quad \text{d'après Newton si } \mathcal{R} \text{ galiléen.}$$

<u>thm</u>

Si $\mathcal{R}$ galiléen:

$$\dot{\vec{L_O}}(M/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$$

<u>thm</u> TMC par rapport à un axe

Si $\mathcal{R}$ Galiléen:

$$\dot{L}_\Delta(M/\mathcal{R}) = \dot{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F})$$

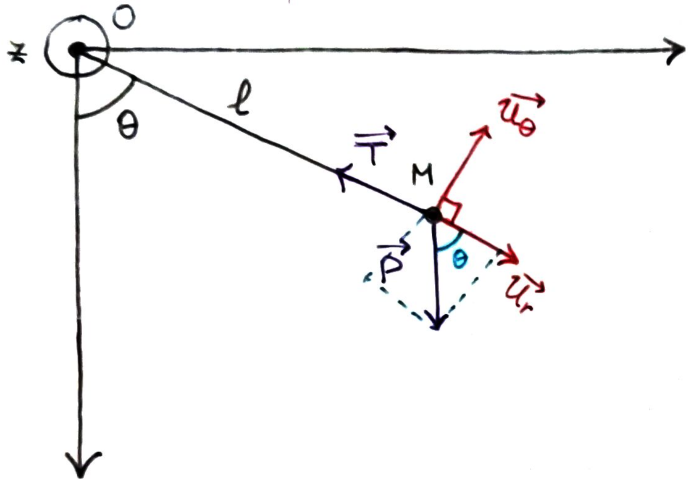
dem

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \dot{\vec{L}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{u}_\Delta \cdot \vec{L}_O) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \quad \text{car } \vec{u}_\Delta \text{ fixe}$$

3 Exemple : le pendule



S : {M}
R : Labo, G.
F : $\vec{P}$, $\vec{T}$

TMC en O :

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

$\vec{OM} = \ell \vec{u}_r$

$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

$\dot{\vec{L}}_O = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \Leftarrow \vec{OM} \,//\, \vec{T}$$

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = l\,\vec{u_r} \wedge \left(mg \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -mgl\sin\theta\,\vec{u_z}$$

On a:

$$ml^2\ddot{\theta}\,\vec{u_z} = -mgl\sin\theta\,\vec{u_z}$$

On projette:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

On obtient le même résultat qu'avec Newton mais sans la projection sur $\vec{u_r}$ à cause du $\wedge$