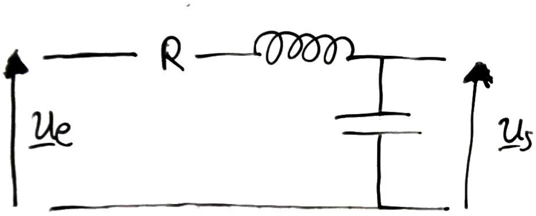
Dans tout ce paragraphe, les fonctions de transfert contiennent des polynômes de degré 1, on parle de filtre d'ordre 1.

II Filtre du second ordre

1 Tension aux bornes de C : LPF



$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On pose $\begin{cases} \omega_0 := \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q := \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0} \end{cases}$

car $L\omega_0 \cdot C\omega_0 = 1$

Parfois, on pose $Q = \frac{1}{2\sigma} = \frac{1}{2\xi}$ (en SI)

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2\sigma j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

déjà vu en resonance

Etude asymptotique

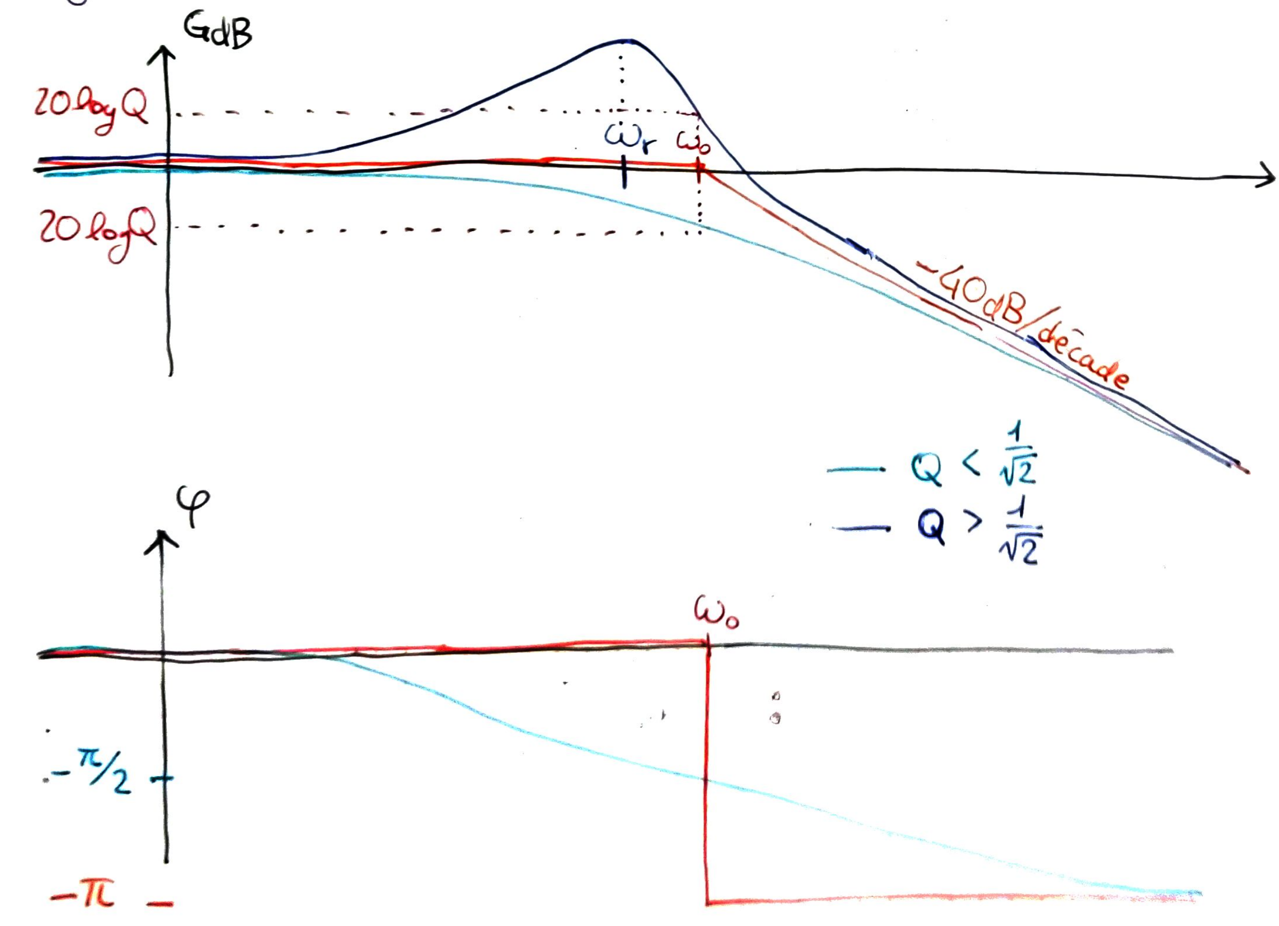
$\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} \sim 1 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0 \text{ rad} \end{cases}$

$\omega = \omega_0$: $\underline{H} = \dfrac{Q}{j} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 20 \log Q \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \quad (*) \end{cases}$

$\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} \sim \dfrac{1}{-j\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = -20 \log_{10} \left| -j\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| = -20 \log_{10} \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = -40 \log \dfrac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi = \pm \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

pas de discont. dans le signe

Diagrammes de Bode



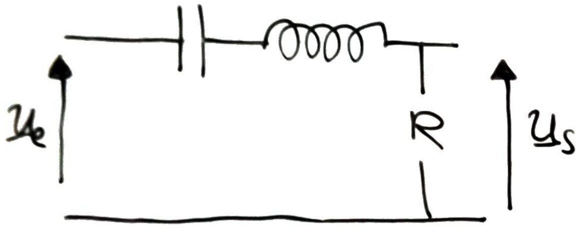
[poly]

La résonance existe si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2 Tension aux bornes de R : Passe-bande



$$\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega}$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $\begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{1}{RC} = Q\omega_0 \end{cases}$

$\odot$: $Q^2 = \frac{1}{R^2}\frac{L}{C} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$\div$: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Etude asymptotique $\underline{H} = \dfrac{1}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$\omega \ll \omega_0$ $\qquad \underline{H} \sim \dfrac{1}{-jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 20 \log_{10}\dfrac{\omega}{\omega_0} - 20 \log_{10} Q \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

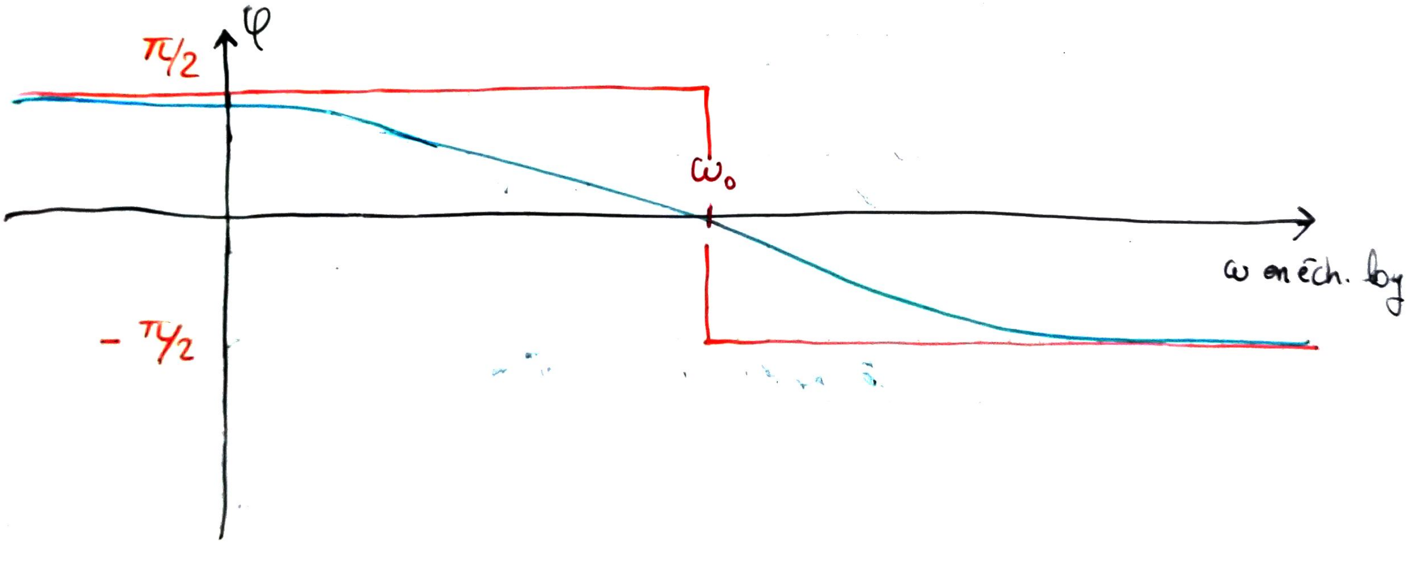
$$|\underline{H}| = \frac{1}{Q\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{1}{Q}\cdot\frac{\omega}{\omega_0}$$

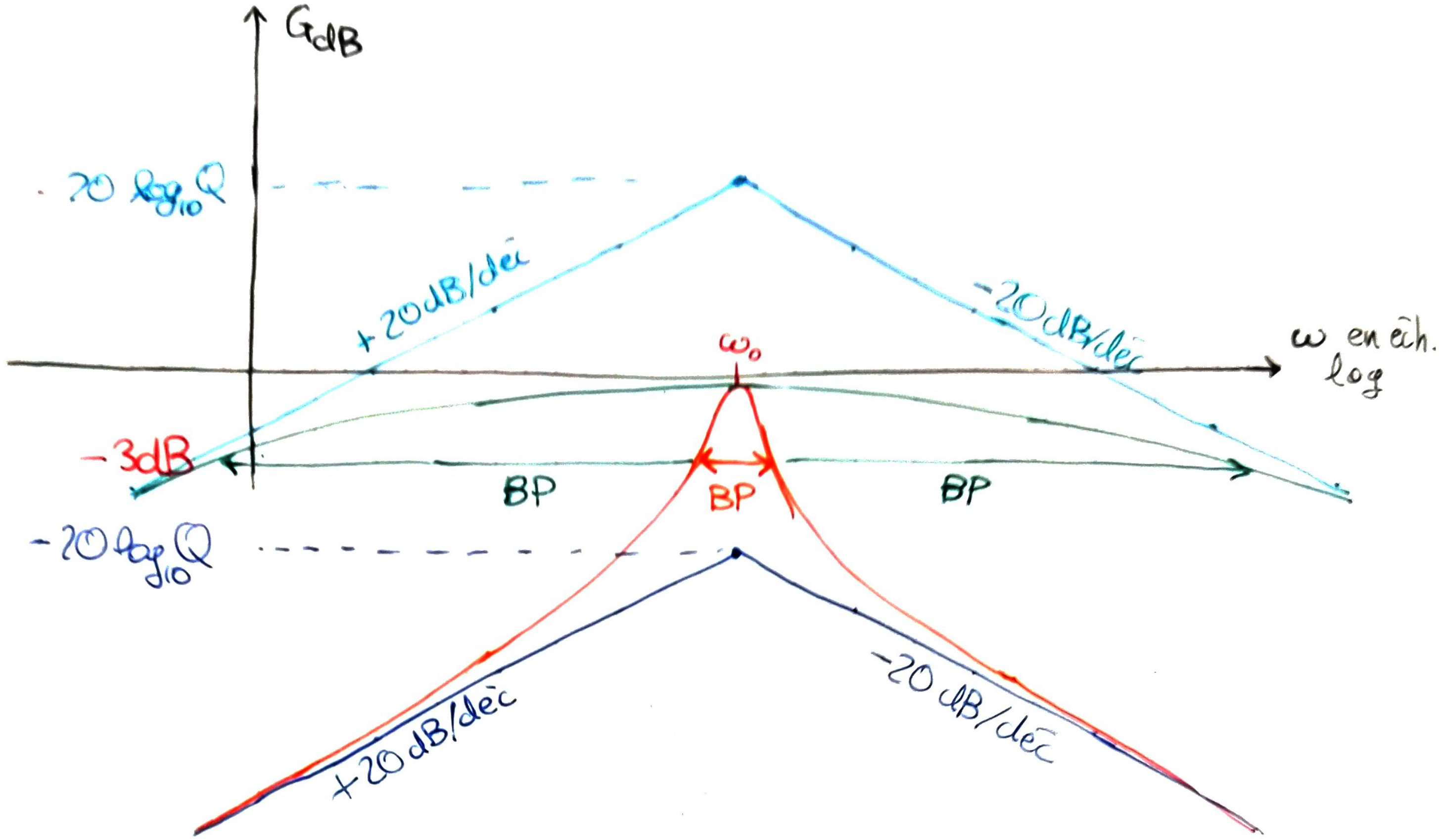
$\omega = \omega_0$ $\qquad \underline{H} = 1 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

$\omega \gg \omega_0$ $\qquad \underline{H} \sim \dfrac{1}{jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = -20 \log_{10}\dfrac{\omega}{\omega_0} - 20 \log_{10} Q \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$|\underline{H}| = \frac{1}{Q\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{Q}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}$$

Diagrammes de Bode





III Propriétés des filtres

1 Caractéristique importante du filtre : pente

pente +20dB/déc ⇒ dérivateur

- passe-haut @ BF
- passe-bande @ BF

pente −20 dB/déc ⇒ intégrateur

- passe-bas @ HF
- passe-bande @ HF

pente + 40 dB/déc (⇒ double dérivateur)

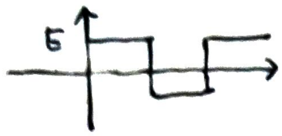
- passe-haut, 2nd ordre @ BF

pente −40 dB/déc (⇒ double intégrateur)

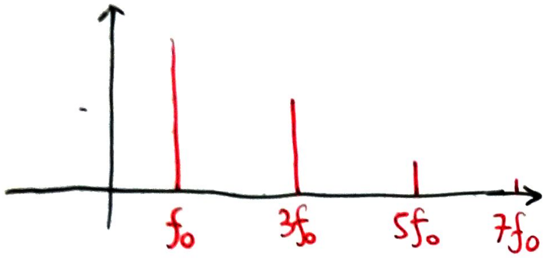
- passe-bas, 2nd ordre @ HF

2 Filtre et spectre :

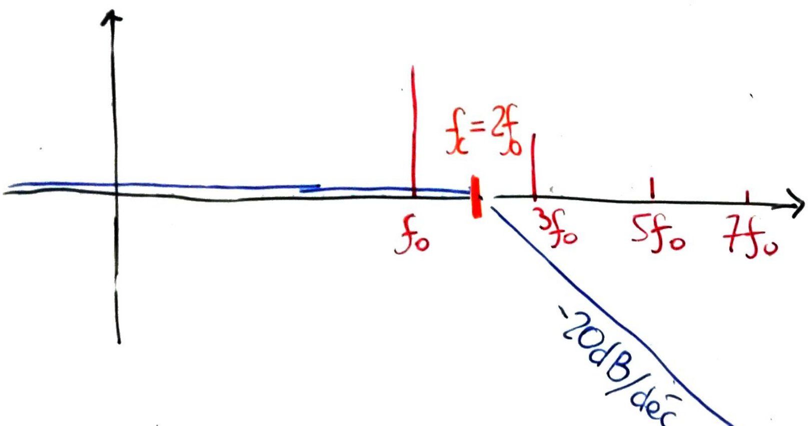
eg créneau de fréquence f_0



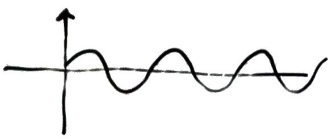
$$u_e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\underbrace{\sin(2\pi f_0 t)}_{\text{fondamental}} + \underbrace{\frac{\sin(2\pi 3 f_0 t)}{3} + \frac{\sin(2\pi 5 f_0 t)}{5} + \dots}_{\text{harmoniques}}\right.$$



Si on envoie ce signal dans un filtre LPF à fréquence de coupure $f_c = 2f_0$



sortie:



Si on veut sélectionner l'harmonique $f_k = k f_0$, on envoie le signal d'un passe-bande de fréq $f_c = f_k$.

IV Valeur efficace d'un signal

Soit le signal $s(t)$

la valeur efficace S_{eff} de ce signal.
RMS

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt}$$

Si le signal est sinusoïdal,

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} S_m^2 \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2T} S_m^2 \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi)}{2\omega}\right]_{t=0}^T}$$

$$\sin(\underbrace{2\omega T}_{\underbrace{2\omega \frac{2\pi}{\omega}}_{4\pi}} + 2\varphi) - \sin(2\varphi)$$

par 2π-périodicité de sin

$$\sin(\dots) - \sin(\dots) = 0$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2T} S_m^2 (T - 0)}$$

$$= \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$

interprétation

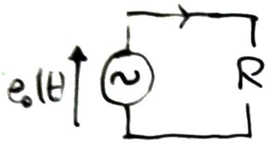
- en régime continu.

$$I_0 = \frac{E_0}{R}$$

La puissance délivrée par le générateur et reçue par la résistance : $P = E_0 I_0 = \frac{E_0^2}{R}$

- en RSF

$i_0(t) = \frac{E_0}{R}\cos(\omega t)$



$$e_0(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

La puissance délivrée par le générateur :

$$p(t) = e_0(t) \cdot i_0(t)$$
$$= \frac{E_0^2}{R} \cos(\omega t)^2$$

En moyenne :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{R}\cos(\omega t)^2\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\,\frac{E_0^2}{R} \cdot \frac{T}{2}$$
$$= \frac{E_0^2}{2R}$$

On obtiendra la m̂ puissance qu'en continu si le générateur possède une valeur max $= E_0 \cdot \sqrt{2}$

Conclusion

Un signal sinusoïdal de valeur maximale $E_0\sqrt{2}$ (donc de valeur efficace E_0) est aussi efficace en puissance qu'un sig. constant de valeur E_0

V Le plus important !!!!1

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \quad \begin{cases} \boxed{|\cdot| \Rightarrow \text{rapport des amplitudes}} \\ \boxed{\arg \Rightarrow \varphi_s - \varphi_e \text{ déphasage de s par rapp à e}} \end{cases}$$

Si $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$

$$u_s(t) = \underbrace{U_{em} \cdot |\underline{H}|_{(\omega)}}_{U_{sm}} \cos(\omega t + \underbrace{\varphi_e + \arg(\underline{H})_{(\omega)}}_{\varphi_s})$$

Le filtre modifie l'amplitude et le déphasage