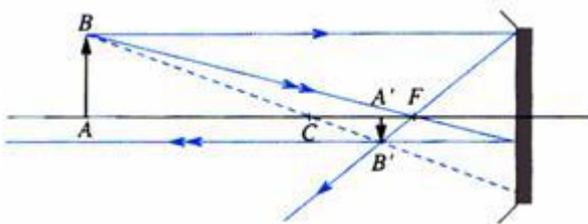


PARTIE B - INTERFEROMETRIE STELLAIRE [CCP 98 PB 2]

En 1996, les astronomes ont déterminé, avec une excellente précision, la géométrie de l'étoile double Capella, dans le domaine spectral du proche infrarouge. La méthode utilisée est celle qui fut imaginée dès 1868 par Fizeau, puis mise en œuvre pour la première fois par Michelson en 1920, dans le domaine visible. L'apport nouveau réside dans la neutralisation des effets perturbants de la turbulence atmosphérique par l'utilisation de trois télescopes : on combine convenablement les facteurs de visibilité des franges d'interférence obtenues avec les différents couples de télescopes.

1. Système optique

L'objectif d'un télescope est constitué d'un miroir primaire sphérique M_p , concave, dont le rayon de courbure sur l'axe optique est de 30 m, et un petit miroir sphérique secondaire M_s , convexe, de rayon de courbure 32 m (Figure 1). La distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux miroirs est 9 m.



On rappelle que pour un miroir sphérique la formule de conjugaison et de grandissement avec origine au sommet S est :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{1}{SC}$$

a) Où se trouve le foyer image F_p du miroir primaire M_p ?

b) Quelle est, par rapport au sommet S_2 du miroir secondaire M_s , la position de l'image F_c que donne M_s de F_p ? En déduire la distance qui sépare F_c du sommet S_1 du miroir primaire.

Dans la suite, on assimile le télescope à une lentille mince convergente L, de centre O et de distance focale image $f=24m$.

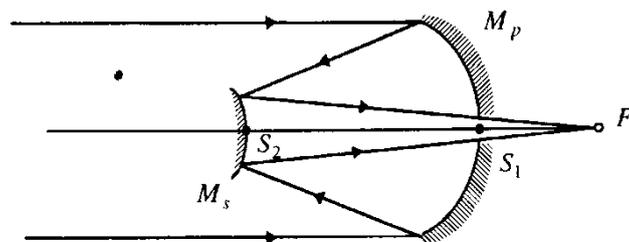


Figure 1

2. Image d'un objet ponctuel

Partie supprimée

3. Fentes de Young

Le diaphragme pupillaire est percé de deux fentes F_1 et F_2 , de largeur ε et distantes de a .

a) Trouver la répartition de l'éclairement $I(u)$ dans le plan focal image de la lentille lorsque l'étoile observée est un point lumineux situé sur l'axe de la lentille.

b) Représenter, avec soin, le graphe $I(u)$, dans le cas où $a = 70cm$. Calculer, en millisecondes d'arc, l'interfrange angulaire pour $\lambda = 635nm$. En quoi la largeur ε des fentes sources intervient-elle ? Expliquer précisément et donner l'allure du graphe réel.

c) Que devient le graphe précédent lorsque le rapport ε / a tend vers 0 ? Quelle conclusion physique doit-on alors tirer sur l'influence de la largeur des fentes ?

4. Distance angulaire d'une étoile double symétrique

On pointe, avec le dispositif des fentes de Young, le centre Ω d'une étoile double symétrique ; cette étoile est constituée de deux sources primaires incohérentes E_1 et E_2 , de contributions égales en intensité : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

On oriente la direction définie par les fentes de telle sorte que F_1F_2 passant par O soit parallèle à E_1E_2 (Figure 2). La largeur ε de chacune des fentes est négligeable devant la distance a qui les sépare.

On désigne par λ la longueur d'onde, D_s la distance ΩO , x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s parallèle à l'axe pupillaire Ox et x_{s2} la position analogue de E_2 . On a ici : $x_{s2} = -x_{s1}$.

a) Quelles sont, en fonction de I_s , λ , a , X , f , D_s , x_{s1} et x_{s2} , les contributions de E_1 et E_2 dans l'éclairement du plan focal de la lentille ?

b) Montrer, *sans calcul*, que la répartition de l'éclairement devient uniforme lorsque la distance a des deux fentes prend une valeur particulière a_1 que l'on déterminera en fonction de λ et de la distance angulaire θ qui sépare E_1 et E_2 .

c) Etablir l'expression de la répartition de l'éclairement résultant des contributions de E_1 et E_2 . Dans le cas de Capella, supposée symétrique dans le visible, pour $\lambda = 635 \text{ nm}$, on a trouvé $a_1 = 116,5 \text{ cm}$. En déduire θ en milliseconde d'arc.

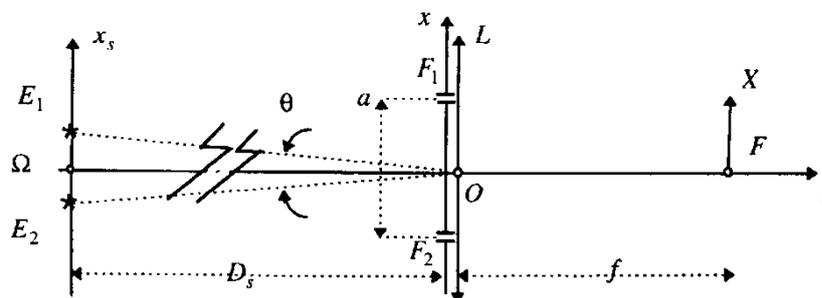


Figure 2

5. Interféromètre à deux télescopes

Au lieu d'utiliser un seul télescope dont la pupille est percée de deux trous, on couple deux télescopes identiques T_1 et T_2 , de même ouverture circulaire, de diamètre négligeable par rapport à la ligne de base $a = T_1T_2$ (Figure 3). Dans ce cas, la position moyenne de l'étoile est repérée par l'angle α , différent de 0, que fait, avec la normale à T_1T_2 , la direction $O\Omega$, O étant le milieu de T_1T_2 .

On désigne ici aussi par D_s la distance $O\Omega$, x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s perpendiculaire à la direction $O\Omega$, et x_{s2} la position analogue de E_2 , avec : $x_{s2} = -x_{s1}$.

Un dispositif annexe permet de faire interférer les ondes optiques issues des deux foyers images en introduisant une différence de marche supplémentaire L , déterminée.

On se place dans le cas où $a = 6,10 \text{ m}$ et $\alpha = 60^\circ$. En outre, le rayonnement est quasi-monochromatique et centré sur la longueur d'onde $\lambda = 635 \text{ nm}$. Enfin l'étoile est supposée symétrique : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

a) Exprimer, en fonction de λ , α , L , a , x_{s1} , x_{s2} et D_s les différences de phase ϕ_1 et ϕ_2 associées à E_1 et E_2 .

b) Montrer que l'éclairement total I s'écrit : $I = 2I_s \left[1 + \cos\left(\frac{\pi b \theta}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi \frac{1+L_s}{\lambda}\right) \right]$

b et l étant des longueurs que l'on déterminera en fonction de a et de α .

c) Trouver, en milliseconde d'arc, la plus petite distance angulaire que l'on a pu détecter en obtenant un éclairement uniforme avec les valeurs précédentes de a , λ et α . Quel est l'intérêt d'un tel système par rapport à celui décrit à la question 4 ?

d) On s'arrange généralement pour que $L_s = -l$. Quelle en est la raison ?

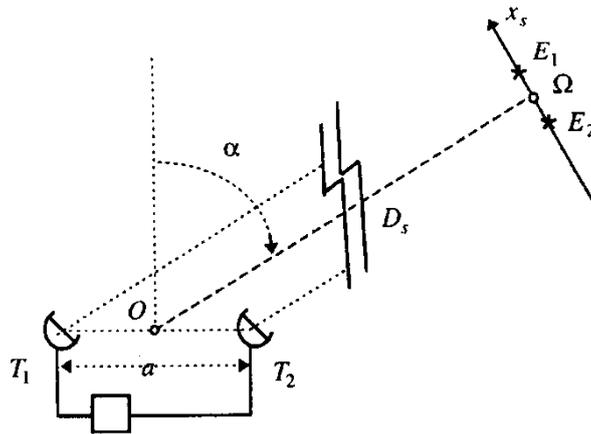


Figure 3

6. Distance angulaire des composantes d'une étoile double non symétrique

On considère à nouveau le montage de la figure 2, mais les contributions de E_1 et E_2 sont différentes : $I_{s2} = \mu I_{s1}$, μ étant un facteur inconnu.

a) Montrer que la nouvelle répartition de l'éclairement total dans le plan focal image de la lentille peut se mettre sous la forme : $I(P) = (I_{s1} + I_{s2}) \left[1 + \text{Re} \left\{ \gamma_s \exp \left(i 2\pi \frac{aX}{\lambda f} \right) \right\} \right]$

où γ_s , appelé degré complexe de cohérence spatiale, a pour expression :

$$\gamma_s = C_1 \exp\left(i\pi \frac{a}{l_s}\right) + C_2 \exp\left(-i\pi \frac{a}{l_s}\right)$$

(C_1, C_2) étant deux facteurs que l'on exprimera en fonction de μ , et l_s une largeur que l'on reliera à λ et à la distance angulaire θ . En déduire la partie réelle, la partie imaginaire, le module $|\gamma_s|$ et l'argument α_s de γ_s .

b) Le facteur de visibilité des franges d'interférence est défini expérimentalement par $V = (I_M - I_m) / (I_M + I_m)$, I_M étant la valeur maximale de l'éclairement et I_m sa valeur minimale. Quelle relation simple existe-t-il entre γ_s et V ?

c) Donner l'expression de V en fonction de μ et de $\cos(\pi a / l_s)$. Quelles sont les valeurs minimale V_m et maximale V_M de V en fonction de μ ? Que deviennent ces valeurs dans le cas où $\mu = 1$?

d) Pour $a = a_1 = 116,5$ cm, on atteint la première valeur minimale V_m qui vaut 0,35. En outre, on constate que $\alpha_s > 0$. Trouver la distance angulaire θ et la valeur de μ .

THERMODYNAMIQUE

On se propose d'étudier dans ce problème le fonctionnement d'une turbine à gaz (ou turbine à combustion). Elles fonctionnent habituellement selon un cycle ouvert selon le schéma de la **Figure 1**.

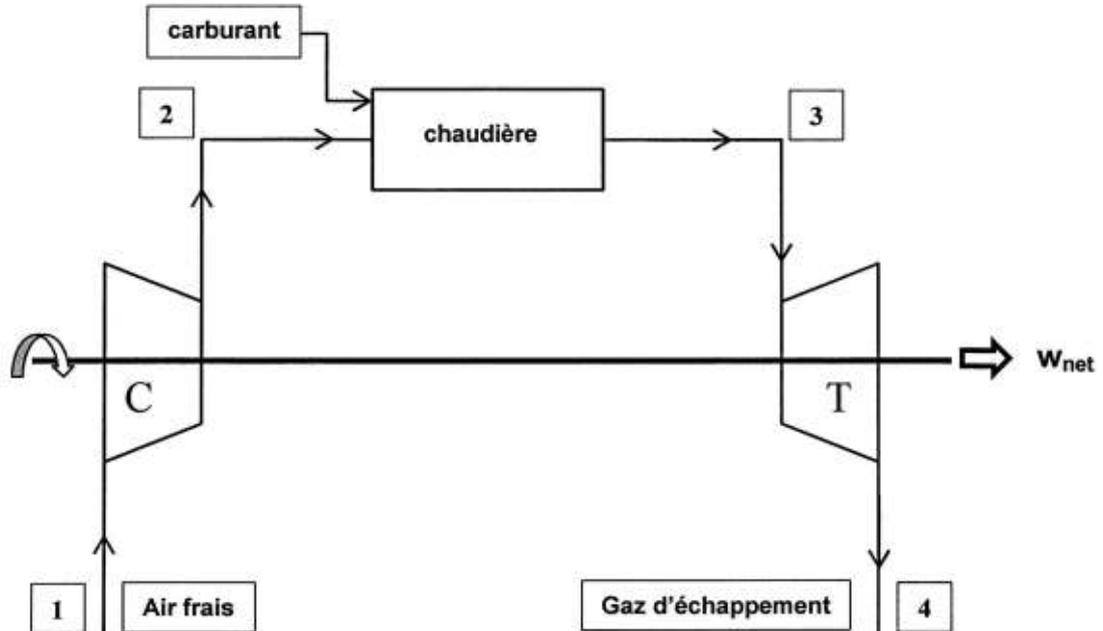


Figure 1

L'air frais pris à l'atmosphère est comprimé à haute pression dans le compresseur (C) puis il est admis dans la chambre de combustion (chaudière). Les gaz chauds résultants de la combustion se détendent alors dans la turbine (T) avant d'être évacués à l'atmosphère sous forme de gaz d'échappement. Le compresseur et la turbine sont montés sur le même arbre permettant de récupérer un travail noté w_{net} , travail net récupéré pour l'admission d'un kg d'air frais par seconde.

I. PRELIMINAIRES

Considérons une machine thermodynamique ouverte telle que présentée sur la **Figure 2**. Le fluide s'écoule en régime permanent avec un débit massique noté D . Il entre dans la machine à une altitude z_e dans les conditions de pression et température (P_e, T_e) avec une vitesse d'écoulement c_e . Il sort de la machine à une altitude z_s avec une vitesse c_s dans les conditions de pression et température (P_s, T_s) . Les canalisations d'entrée et de sortie de la machine sont calorifugées. Le fluide ne peut échanger de chaleur avec l'extérieur que lorsqu'il se trouve dans la machine.

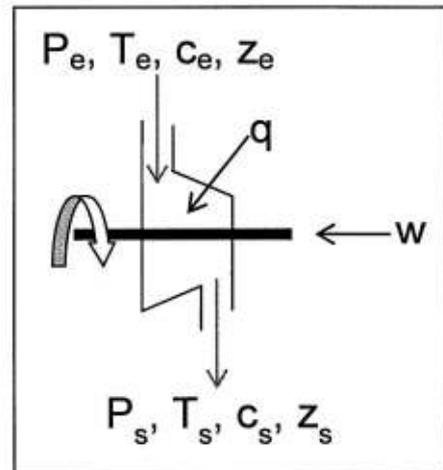


Figure 2

- 1- Montrer que le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système que vous préciserez soigneusement, permet d'établir l'expression suivante :

$$\left[(h_s - h_e) + \frac{1}{2} (c_s^2 - c_e^2) + g(z_s - z_e) \right] = q + w$$

avec :

- h enthalpie massique du fluide
 - q transfert thermique massique reçu par le fluide de l'extérieur lorsqu'il est dans la machine
 - w travail massique indiqué reçu par le fluide de l'extérieur lorsqu'il traverse la machine.
- w et q étant pris comme des grandeurs algébriques.

- 2- Par la suite on sera amené à étudier un écoulement d'air supposé gaz parfait, non pesant et de variation d'énergie cinétique négligeable. On notera alors c_{pm} et c_{vm} les capacités thermiques

massiques à pression et volume constants. Elles seront considérées indépendantes de la température et de rapport :

$$\gamma = \frac{c_{pm}}{c_{vm}}$$

En appliquant les hypothèses précédentes et à partir de l'expression démontrée dans la question 1, proposez une expression simplifiée faisant intervenir les températures d'entrée et de sortie du fluide.

- 3- On note R la constante molaire des gaz parfaits et M la masse molaire de l'air. Déterminer c_{pm} et c_{vm} en fonction de R, M et γ .
- 4- Pour l'air on prend $M=29\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\gamma=1,4$ et $R=8,31\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. Calculer c_{pm} et c_{vm} .

II. MODELISATION IDEALE DU CYCLE : CYCLE DE JOULE

Le cycle ouvert présenté en **Figure 1**, peut être modélisé comme un cycle fermé. Ce cycle est présenté sur la **Figure 3**.

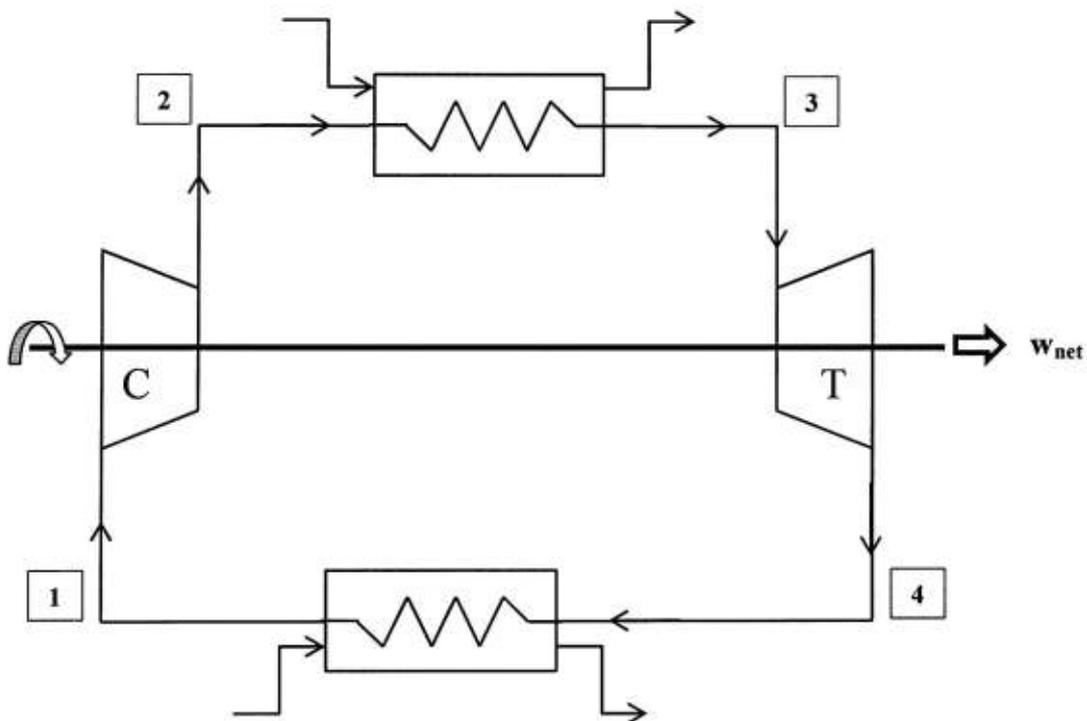


Figure 3

Les évolutions de compression et de détente restent inchangées. Le phénomène de combustion est remplacé par une évolution d'échange de chaleur à pression constante avec une source de chaleur externe. L'échappement des gaz brûlés et l'admission d'air frais est remplacé par une évolution d'échange de chaleur à pression constante avec le milieu extérieur.

L'air subi une succession de 4 évolutions réversibles au cours du cycle :

- au point 1 l'air entre dans le compresseur pour y subir **une compression isentropique** jusqu'au point 2.
 - entre les points 2 et 3 l'air échange de la chaleur avec un fluide extérieur dans un échangeur de chaleur **isobare** modélisant la chaudière.
 - au point 3 l'air entre dans la turbine pour y subir **une détente isentropique** jusqu'au point 4.
 - entre les points 4 et 1 l'air échange de la chaleur avec l'atmosphère dans un échangeur de chaleur **isobare**. L'air du cycle est ainsi refroidi.
- 5- On note v le volume massique de l'air. Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P,v) le cycle subi par l'air. On précisera les points 1, 2, 3, et 4, et le sens du parcours du cycle.

On donne le cycle dans le diagramme (T,s) où s est l'entropie massique de l'air en **Figure 4**.

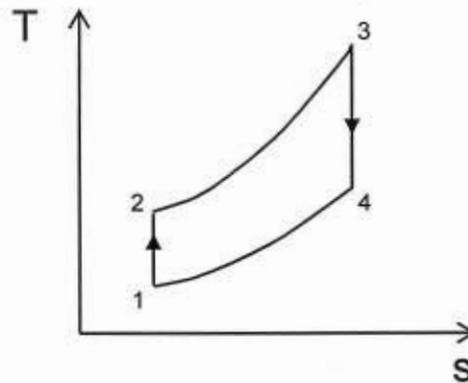


Figure 4

- 6- Exprimer l'entropie massique de l'air à la température T et à la pression P, notée $s(T,P)$, en fonction de l'entropie massique à la température T_0 et la pression P_0 notée $s(T_0,P_0)=s_0$ de T_0, P_0 .
- 7- En déduire qu'une évolution isobare se représente comme une exponentielle conformément au cycle tracé dans le diagramme (T,s) de la **Figure 4**.

Détermination des grandeurs énergétiques

Par la suite on notera toute grandeur relative au point i du cycle, X_i . Par exemple, la température du point 1 est notée T_1 .

- 8- Déterminer les transferts thermiques subis par l'air dans les deux échangeurs de chaleur que l'on notera respectivement q_{23} et q_{41} en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.
- 9- Déterminer le travail massique, noté w_{12} , reçu par l'air en traversant le compresseur en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.
- 10- Déterminer le travail massique, noté w_{34} , reçu par l'air en traversant la turbine en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.
- 11- Exprimer w_{net} (défini en début d'énoncé) en fonction des travaux w_{12} et w_{34} .
- 12- En déduire une expression de w_{net} uniquement en fonction des différentes températures des points 1,2,3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.

Expression du rendement et optimisation

13- Définir le rendement de l'installation.

14- Montrer que l'on peut le mettre sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

15- On introduit le taux de compression défini par :

$$\tau = \frac{P_2}{P_1}$$

Montrer alors que l'on peut mettre le rendement sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{1}{z}$$

avec z que vous exprimerez uniquement en fonction du taux de compression τ et du rapport des capacités thermiques à pression et volume constant γ .

- 16- D'après la question précédente, sur quelle grandeur peut-on influencer pour augmenter le rendement ? Au cours d'une étude technico-commerciale du dispositif, quel autre élément faudra-t-il prendre en compte pour concevoir la turbine à gaz ?

Optimisation du travail récupéré sur l'arbre

On impose le fonctionnement de cette turbine à gaz à T_1 fixé à 300K (température de l'air pris à l'atmosphère), T_3 fixé à 1000K (grandeur limitée par la résistance des matériaux des aubes de la turbine). T_2 et T_4 , quant à elles, varient selon le rapport de compression choisi.

- 17- Dans le diagramme de Clapeyron, que représente l'aire du cycle subi par le fluide ? On justifiera avec soin la réponse.
- 18- Par le même type de raisonnement, en déduire ce que représente l'aire du cycle subi par le fluide en diagramme (T,s). On justifiera avec soin la réponse.
- 19- Pourquoi alors obtient-on par simple lecture de l'aire du cycle subi par le fluide en diagramme (T,s), le travail net récupéré sur l'arbre w_{net} .
- 20- Les températures des points 1 et 3 du cycle étant fixées ainsi que la pression entre les points 4 et 1 du cycle, représenter le cycle de Joule (en diagramme (T,s)), dans les deux cas suivants :
 - a. Un rapport de compression tel que T_2 se rapproche de la valeur de T_3 .
 - b. Un rapport de compression tel que T_2 se rapproche de la valeur de T_1 .
- 21- En déduire que w_{net} passe forcément par un maximum.
- 22- Exprimer le travail net w_{net} uniquement en fonction de c_{pm} , T_3 , T_1 et z .
- 23- Déterminer par le calcul la valeur de z rendant w_{net} maximal uniquement en fonction de T_1 et T_3 (T_1 et T_3 étant fixés).
- 24- En déduire la valeur maximale que w_{net} peut atteindre. On exprimera w_{net} uniquement en fonction de c_{pm} , T_1 et T_3 .
- 25- Calculer numériquement w_{net} , T_2 , T_4 et le rendement dans ce cas de figure.

III. MISE EN PLACE D'UNE COMPRESSION ETAGEE

La compression des gaz est une opération délicate et surtout très coûteuse. Pour répondre à ce problème, on est amené à procéder à une compression étagée comme proposé sur la partie droite de la Figure 5.

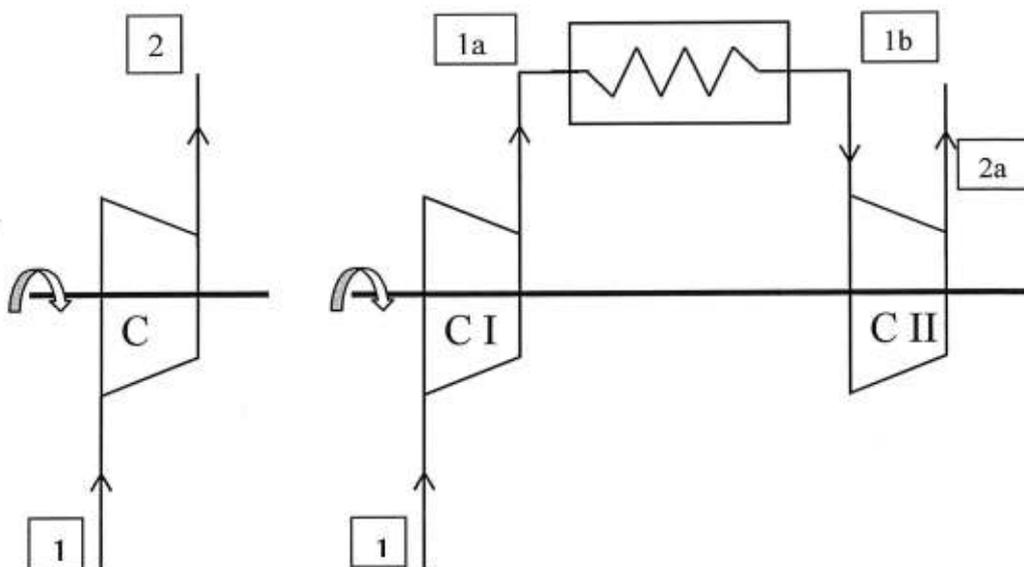


Figure 5 : Compression à un étage (à gauche) à deux étages (à droite)

Au point 1, l'air est sous la pression P_1 et la température T_1 .

Compression à un étage :

- Evolution 1 → 2 : compression isentropique de P_1 à P_2 .

Compression à deux étages :

- Evolution 1 → 1a : compression isentropique de P_1 à P_x .
- Evolution 1a → 1b : refroidissement isobare jusqu'à la température T_1
- Evolution 1b → 2a : compression isentropique de P_x à P_2 .

26- On donne en **Figure 6**, le tracé à partir d'un point 1 du diagramme de Clapeyron, deux évolutions : l'une isotherme, l'autre isentropique. Reprenez sur votre copie ce diagramme en identifiant le tracé de l'évolution isentropique et de l'évolution isotherme. On justifiera la réponse en démontrant une relation entre la pente d'une isotherme et la pente d'une isentropique.

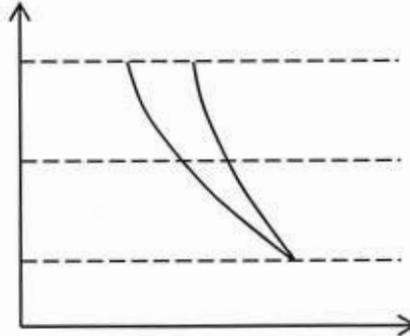


Figure 6

- 27- Toujours à partir de la **Figure 6**, tracer un nouveau diagramme de Clapeyron en y faisant figurer la courbe représentative de l'évolution de 1 → 2 relative à la configuration compression à un étage. Sur le même graphe représenter les trois évolutions 1 → 1a, 1a → 1b et 1b → 2a relatives à la configuration compression à deux étages.
- 28- En déduire par un raisonnement graphique, l'intérêt d'une compression à deux étages par rapport à la compression à un étage.
- 29- Dans un diagramme entropique (T,s), représenter les trois isobares P_1 , P_x , P_2 . Faire figurer également l'isotherme T_1 . Et enfin faire apparaître les trois évolutions 1 → 1a, 1a → 1b et 1b → 2a.

On pourrait alors montrer que, pour obtenir un travail minimal de compression, il faut choisir un rapport de pression entre chaque étage identique. A savoir ici :

$$\frac{P_2}{P_x} = \frac{P_x}{P_1}$$

IV. TURBINE A GAZ AVEC COMPRESSEUR ET TURBINE A DEUX ETAGES ET REGENERATEUR

Ce que l'on vient de montrer lors de la partie III, avec le compresseur est valable aussi pour la turbine. La **Figure 7** représente le schéma de fonctionnement d'une turbine à gaz comprenant un compresseur à deux étages, une chambre de combustion, une turbine à deux étages puis un régénérateur.

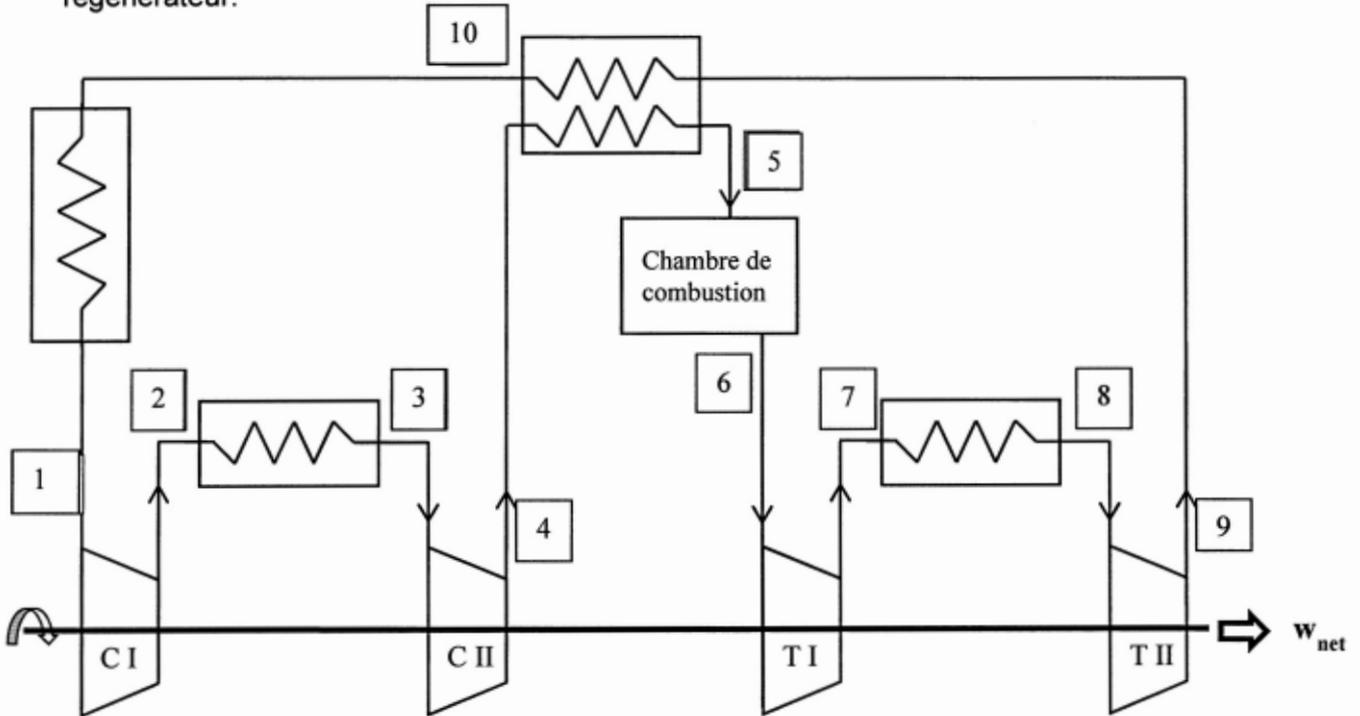


Figure 7

Les évolutions subies par l'air sont les suivantes :

- 1 → 2 Compression isentropique de P_1 à P_x .
- 2 → 3 Refroidissement isobare.
- 3 → 4 Compression isentropique de P_x à P_2 .
- 4 → 5 L'air passe dans le régénérateur où il est mis en contact avec l'air chaud récupéré en sortie de la turbine à deux étages (point 9). Ce régénérateur permet un préchauffage de l'air avant la combustion. L'air y reçoit un transfert thermique q_{45} de manière isobare.
- 5 → 6 Passage de l'air dans la chambre de combustion où il reçoit de l'extérieur de manière isobare un transfert thermique q_{56} .
- 6 → 7 Détente isentropique de P_2 à P_x .
- 7 → 8 Réchauffement isobare.
- 8 → 9 Détente isentropique de P_x à P_1 .
- 9 → 10 L'air passe dans le régénérateur (**supposé idéal**) où il est mis en contact avec l'air sortant du compresseur à deux étages (point 4). L'air y reçoit un transfert thermique q_{910} de manière isobare.
- 10 → 1 Refroidissement isobare. L'air reçoit de l'extérieur un transfert thermique q_{101} .

Conformément à ce qui a été dit à la fin de la partie III, le rapport des pressions de chaque étage doit être le même. Ce résultat est aussi valable pour les étages de détente.

Ce qui nous permet de poser : $T_1=T_3$; $T_4=T_2=T_{10}$; $T_5=T_7=T_9$ et $T_6=T_8$.

30- Dans le diagramme (T,s) de la **Figure 8** repris en document annexe que l'on rendra avec la copie, sur laquelle sont représentées les isobares P_1 , P_2 et P_x et les isothermes T_1 , T_2 , T_5 et T_6 , tracer le cycle correspondant au schéma de la **Figure 7**. On prendra soin de faire figurer les points 1 à 10 du schéma de la **Figure 7**. (les isobares et isothermes sont à identifier).

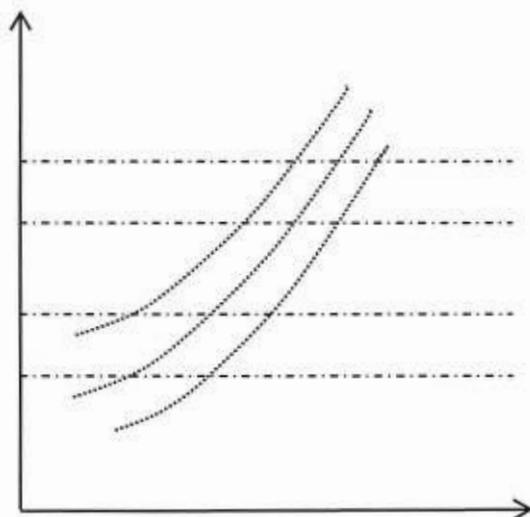


Figure 8

- 31- Où peut-on lire graphiquement par simple différence entre deux grandeurs q_{45} , q_{56} , q_{910} et q_{101} à un coefficient près que l'on donnera? Les faire figurer sur votre diagramme des questions 30.
- 32- Exprimer alors le rendement de cette installation en fonction des différents transferts thermiques massiques et des travaux échangés au cours du cycle. En déduire une forme de ce rendement uniquement en fonction des températures T_1 , T_2 , T_5 et T_6 .
- 33- On désire augmenter le nombre d'étages de compression et de détente, tout en gardant un même rapport de compression (de détente) pour chaque étage de compression (de détente). Soit n étages de compression pour passer de P_1 à P_2 . Exprimer le taux de compression d'un étage en fonction de P_1 , P_2 et n .
- 34- En déduire vers quelle valeur tend ce rapport si n tend vers plus l'infini.

On peut alors, dans le cas d'un nombre d'étage de compression et de détente infini, assimiler le cycle subi par l'air à un cycle composé de deux isobares P_1 et P_2 et deux isothermes de température T_a et T_b ($T_a < T_b$), décrit de manière réversible.

- 35- Tracer le cycle dans le diagramme (T,s) .
- 36- Identifier sur ce schéma les évolutions correspondantes au fonctionnement du régénérateur, du réchauffement lors des détentes, et du refroidissement lors des compressions.
- 37- En appliquant le second principe de la thermodynamique, exprimer q_{ch} le transfert thermique massique échangé par le fluide au cours du réchauffement lors des détentes, en fonction des températures et pressions caractéristiques du cycle tracé à la question 35.
- 38- De même, exprimer q_{fr} le transfert thermique massique échangé par le fluide au cours du refroidissement lors des compressions.
- 39- En déduire l'expression du rendement en fonction des températures T_a et T_b .
- 40- Quelle remarque peut-on faire ? Dans la pratique, on se contente de 3 étages. Pourquoi ?

**DOCUMENT ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE :
FIGURE 8**

