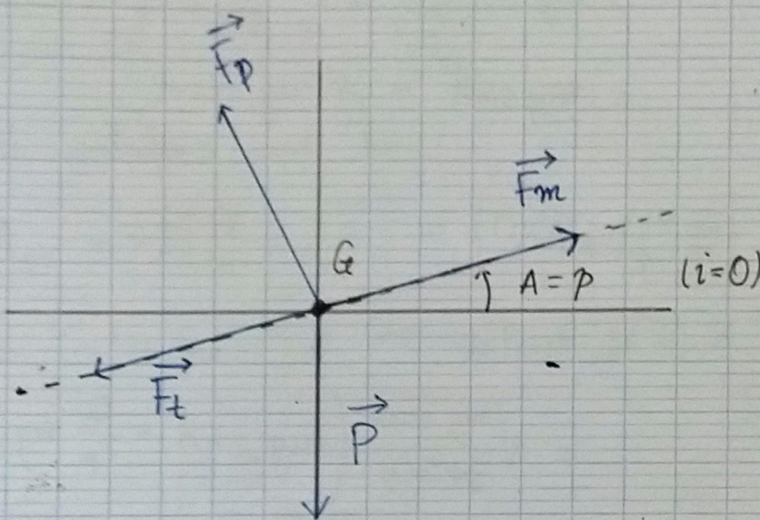
LE BIHAN
Ewen

DM Vacances — Mécanique

1.



2. Nous sommes bien dans un référentiel Galiléen.
Le système est $\{G\}$.

Ainsi, la deuxième loi de Newton donne :

$$\vec{F_p} + \vec{F_m} + \vec{F_t} + \vec{P} = m\vec{a} = \vec{0}$$ car la vitesse est constante

Projetons :

$$\begin{cases} (/\vec{F_t}) & mg\sin A - \|\vec{F_m}\| + \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t = 0 \\ (/\vec{F_p}) & mg\cos A + \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p = 0 \end{cases}$$

3. En utilisant $(/\vec{F_p})$, on obtient : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{mg\cos A}{\frac{1}{2}\rho S C_p}}}$

4. En utilisant ($/\vec{F_t}$) :

$$F_m = mg\sin A + \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t$$

$$= mg\sin A + \cancel{\frac{1}{2}\rho S}\frac{mg\cos A}{\cancel{\frac{1}{2}\rho S}\, C_p} C_t$$

$$= mg\sin A + \frac{C_t}{C_p} mg\cos A$$

De plus :

$$P_m = F_m \cdot v$$

$$= \sqrt{\frac{mg\cos A}{\frac{1}{2}\rho S C_p}}\left(mg\sin A + \frac{C_t}{C_p} mg\cos A\right)$$

$$P_{m_0} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho S C_p}}\,\frac{C_t}{C_p} mg$$

On en déduit

$$\boxed{P_m = P_{m_0}\sqrt{\cos A}\left(\frac{C_p}{C_t}\sin A + \cos A\right)}$$

Enfin, $\boxed{P_{m_0} = 20 \text{ kW}}$

5. On a $\sqrt{\cos A} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}A^2} = 1 + \frac{1}{4}A^2 \; (+\, o(A^2))$.

Ainsi, $P_m = P_{m_0}\left(1 + \frac{1}{4}A^2\right)\left(\frac{C_p}{C_t}A + 1 - \frac{1}{2}A^2\right)$

$$= P_{m_0}\left(1 + \frac{C_p}{C_t}A + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)A^2\right)$$

en négligeant les termes en A^n avec $n > 2$

$$= P_{m_0}\left(1+\frac{C_p}{C_t}A-\frac{1}{4}A^2\right)$$

Résolvons l'équation $-\frac{1}{4}A^2+\frac{C_p}{C_t}A+1-\frac{5\cdot10^4}{P_{m_0}}=0$

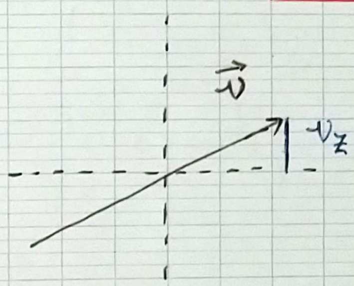
On a $\Delta = \frac{C_p^2}{C_t^2}+1-\frac{50\cdot10^3}{P_{m_0}}$

les solutions sont donc

$$A_{1,2} = -2\left(\frac{C_p}{C_t}\pm\sqrt{\Delta}\right) = \{0,05\ ;\ \cancel{119,95}\} \text{ rad}$$

On retiendra $\boxed{A = 0,05 \text{ rad} \approx 2,86^\circ}$

6.



$$v_z = v\cos A$$

$$\approx 26,69 \text{ m.s}^{-1}$$

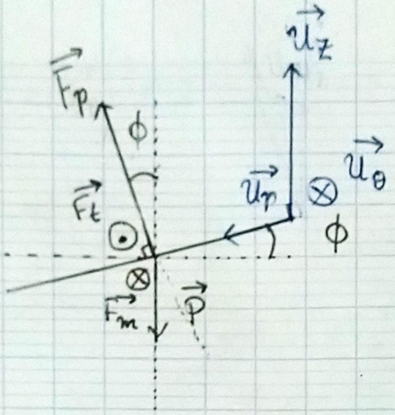
7.

$$\eta = \frac{\|\vec{F_p}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\frac{1}{2}\rho S v^2 C_p}{mg} = \frac{\frac{1}{2}\rho S \frac{mg\cos A}{\frac{1}{2}\rho S C_p} C_p}{mg}$$

$$= \boxed{\cos A}$$

Le facteur de charge sera toujours inférieur à 2 (il sera au maximum égal à 1).

8.



9. D'après la seconde loi de Newton :

$$\vec{F_p} + \vec{F_t} + \vec{F_m} + \vec{P} = m\frac{d}{dt}\left(R\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right)$$

$\dot{R} = \dot{z} = 0$ car la rotation est uniforme et à altitude fixe.

$$= -mR\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

$$= -m\frac{v^2}{R}\vec{u_r} \quad \text{car } v = \frac{\dot{\theta}}{R}$$

ie $\frac{1}{2}\rho S v^2 C_p \cos\phi\,\vec{u_z} + \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p \sin\phi\,\vec{u_r}$ ...

$$-\frac{1}{2}\rho S v^2 C_t\,\vec{u_\theta} - mg\,\vec{u_z} + P_{m_0}\vec{u_\theta} = -m\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$$

10. Projetons :

$$\begin{cases} /\vec{u_r} & \sin\phi\,\frac{1}{2}\rho S v^2 C_p = -m\frac{v^2}{R} \\ /\vec{u_\theta} & -\frac{1}{2}\rho S v^2 C_t + P_{m_0} = 0 \\ /\vec{u_z} & -mg + \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p\cos\phi = 0 \quad \text{ie} \quad \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p = \frac{mg}{\cos\phi} \end{cases}$$

donc $\frac{\sin}{\cos}\phi\,\cancel{m}g = -\cancel{m}\frac{v^2}{R}$ ie $\boxed{R = -\frac{v^2}{\tan\phi\, g}}$

11.

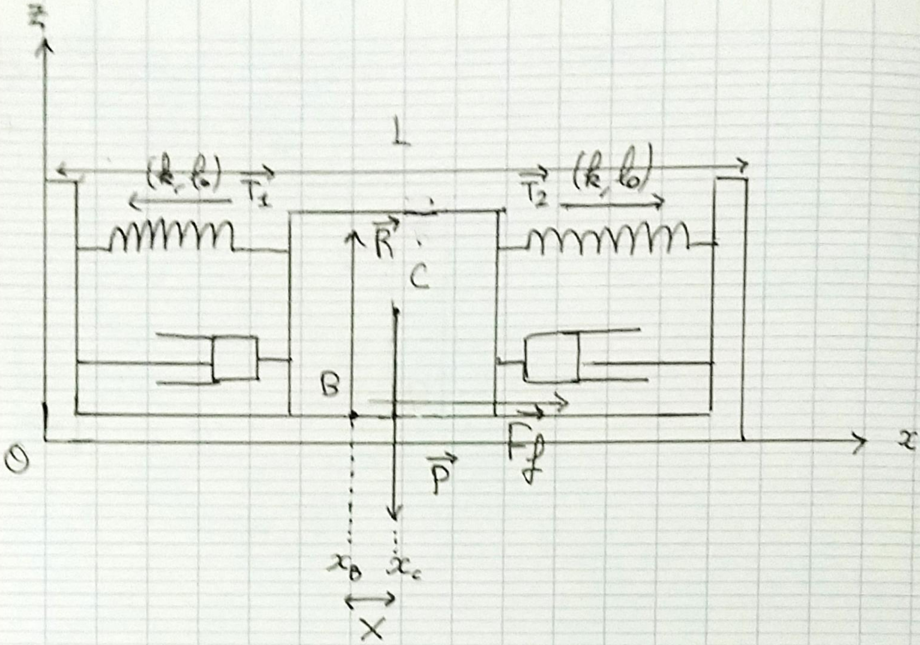
$$\eta = \frac{\|\vec{F_p}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{1}{mg}\sqrt{\left(-m\frac{v^2}{R}\right)^2 + (mg)^2} = \sqrt{\frac{m^2\frac{v^4}{R^2}}{m^2 g^2} + 1} = \sqrt{\cancel{v^4}\cancel{g^2}\left(-\frac{\cancel{v^2}}{\tan\phi\,\cancel{g}}\right)^2 + 1}$$

$$\boxed{= \sqrt{\cotan^2\phi + 1}}$$

12. $\eta_{max} = 2$ ie $\sqrt{\cot^2\phi + 1} = 2$

ie $\frac{1}{\tan\phi} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

ie $\boxed{R_{min} = \frac{v^2}{g}\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$



13.

$$\vec{T} = \vec{T_1} + \vec{T_2}$$

$$= -k(\ell_0 - \ell_1)(-\vec{u_x}) - k(\ell_0 - \ell_2)\vec{u_x}$$

$$= -k\left(-(\cancel{\ell_0} - (\ell_0 + X)) + \cancel{\ell_0} - (\ell_0 - X)\right)\vec{u_x}$$

$$= -k(-(-X) + X)\vec{u_x}$$

$$= -2kX\vec{u_x}$$

14.

Système: {masse mobile}

Référentiel: Galiléen.

D'après la seconde loi de Newton:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_f} + \underbrace{\vec{T_1} + \vec{T_2}}_{\vec{T}} = m\vec{a}$$

Projettons sur $\overrightarrow{u_x}$:

$$0 + 0 - 2f(\underbrace{\dot{x}_C - \dot{x}_B}_{\dot{X}}) - 2kX = m\underbrace{\ddot{x}_C}$$

accélération du système (masse mobile)

ie $\quad \frac{2f}{m}\dot{X} + \frac{2k}{m}X = -(\ddot{X} + \underbrace{a})$

accélération "extérieure"

ie $\quad \ddot{X} + 2\frac{f}{m}\dot{X} + 2\frac{k}{m}X = -a$

Posons $\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$.

On a $\quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2f}{m}$

ie $\quad \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{2f}}$

d'où $\quad \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a$

15.

ω_0 représente la pulsation propre à la masse mobile,

et Q est le facteur de qualité.

$$\begin{cases} [\omega_0] = [rad \cdot s^{-1}] & \text{(vitesse radiale)} \\ [Q] = [\varnothing] & \text{(sans dimension)} \end{cases}$$

16. $X(t)$ doit être de la forme

$X_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi = 0$ car quand $a = 0$; $X = 0$.

17. On a

$$\underline{\ddot{X}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{X}} + \omega_0^2 \underline{X} = -\underline{a}$$

donc

$$\underline{\ddot{X}_m} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{X}_m} + \omega_0^2 \underline{X_m} = -\underline{a_m}$$

ie

$$-\omega^2 \underline{X_m} + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{X_m} + \omega_0^2 \underline{X_m} = -\underline{a_m}$$

ie $$\boxed{\underline{X_m}\left(\omega^2 - j\frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2\right) = \underline{a_m}}$$

18.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{X_m}}{\frac{\underline{a_m}}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - j\frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2}$$

$$\begin{cases} \underline{H} \xrightarrow[\infty]{} \frac{1}{\omega^2} \\ \underline{H} \xrightarrow[0]{} -1 \end{cases}$$

Pour les basses fréquences, on a :

$\underline{H} = -1$ ie $\boxed{\underline{X_m} = -\frac{\underline{a_m}}{\omega_0^2}}$

ie $\underline{X_m} \propto \underline{a_m}$ avec un facteur de $-\frac{1}{\omega_0^2}$

19. On a

$$\underline{H} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - j\frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 - j\frac{x}{Q} - 1}$$

ie $\boxed{|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2 + (-\frac{x}{Q})^2}}}$

On a $|\underline{H}|(f_r) = \max |\underline{H}|$

ie $\frac{1}{|\underline{H}|}(f_r) = \min \frac{1}{|\underline{H}|}$

ie $\frac{d}{dx}\frac{1}{|\underline{H}|} = \frac{\frac{1}{2}\left(4x(x^2-1) + 2\frac{1}{Q}\frac{x}{Q}\right)}{\sqrt{(x^2-1)^2 + (-\frac{x}{Q})^2}} = 0$

ie $4\cancel{x}(x^2-1) = -2\frac{1}{Q}\frac{\cancel{x}}{Q}$

ie $x^2 - 1 = -\frac{1}{2Q^2}$

donc $x = +\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} =: x_r$

la solution positive est retenue car les pulsations ne peuvent pas être négatives.

ie $\omega_r = +\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$

ie $\boxed{f_r = + \underbrace{\frac{\omega_0}{2\pi}}_{f_0}\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$

Finalement :

$$|\underline{H}|(x_r) = \frac{1}{\sqrt{\left(\cancel{1} - \frac{1}{2Q^2} - \cancel{1}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{1 + \frac{1-2}{4Q^2}}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

ie $$\boxed{|\underline{H}|(x_r) = \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}}$$

20.

- $|\underline{H}|(f_r) \approx \frac{25}{\sqrt{25 - \frac{1}{4}}} \approx 5{,}025$

- $f_0 = \frac{f_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \approx 5{,}556$ kHz

Il faut l'utiliser dans des fréquences basses ($\ll 5$ kHz) pour que $|\underline{H}|$ ne varie pas selon f (pour cela, f doit être négligeable devant f_0 dans $x = \frac{\omega}{\omega_0}$)

21.

$$X_m = \frac{\overbrace{a_m}^{g}}{\underbrace{\omega_0^2}_{(2\pi f_0)^2}} = 8{,}05 \cdot 10^{-9}$$

le dispositif captant le déplacement de la masse doit être assez précis pour capter un déplacement de $8{,}05 \cdot 10^{-9}$ *

* l'unité dépend de L