Traitement des signaux issus d'un capteur capacitif

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES INTERDITES

On effectuera les (rares) applications numériques à la main avec un ou deux chiffres significatifs.

Ce problème est constitué de trois parties qui sont en pratique indépendantes.

I. Extraction du signal de position d'un capteur à condensateur double

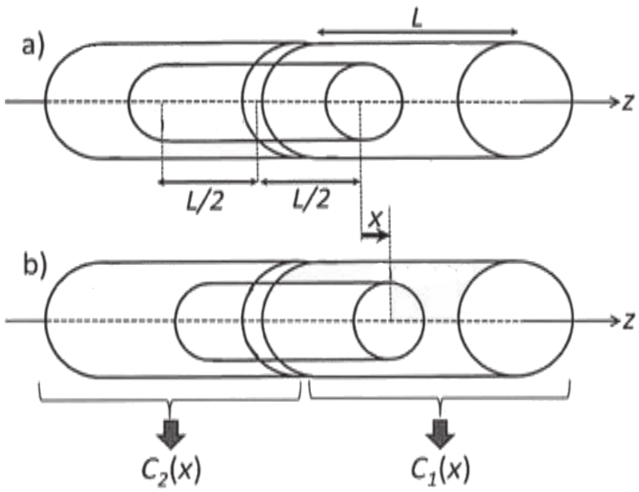
On considère un capteur de mouvement capacitif sous la forme d'un condensateur cylindrique double formé par deux armatures cylindriques coaxiales séparées par de l'air selon la figure ci-dessous.

L'armature externe est en fait un cylindre coupé en deux, dont chaque moitié constitue un condensateur avec l'armature interne qui est commune. Cette dernière est mobile. Elle est représenté en position de référence en a), et après une translation x en b).

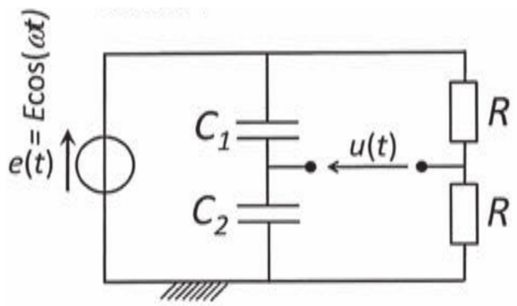
Des calculs d'électrostatique permettent de montrer que la capacité de chaque condensateur dépend de x selon la relation

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{2x}{L}\right) \quad \text{et} \quad C_2 = C_0\left(1-\frac{2x}{L}\right)$$

où C_0 est une capacité de référence dont l'expression en fonction des caractéristiques du condensateur n'est pas utile pour ce problème.



On insère ce condensateur double dans le montage en pont représenté sur la figure ci-contre. Le pont est considéré en sortie ouverte, c'est-à-dire que l'on admet qu'aucun courant ne circule entre les deux bornes où l'on mesure la tension $u(t)$. Le régime sinusoïdal est forcé par le générateur supposé idéal qui délivre une tension $e(t) = E\,\cos(\omega t)$. On note $u(t) = U\,\cos(\omega t + \varphi)$.



1. Rappeler l'expression définissant la grandeur complexe $\underline{u}(t)$ associée à $u(t)$, ainsi que celle de l'amplitude complexe $\underline{U}$.
2. Déterminer l'expression littérale de l'amplitude complexe $\underline{U}$ en fonction de E, C_1 et C_2.
3. En déduire la relation liant l'amplitude U de $u(t)$ à E, L et x.
4. En déduire l'expression de la sensibilité en amplitude σ_U du capteur ainsi obtenue, et définie par

$$\sigma_U = \left|\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|.$$

   En quoi ce résultat est-il intéressant ?

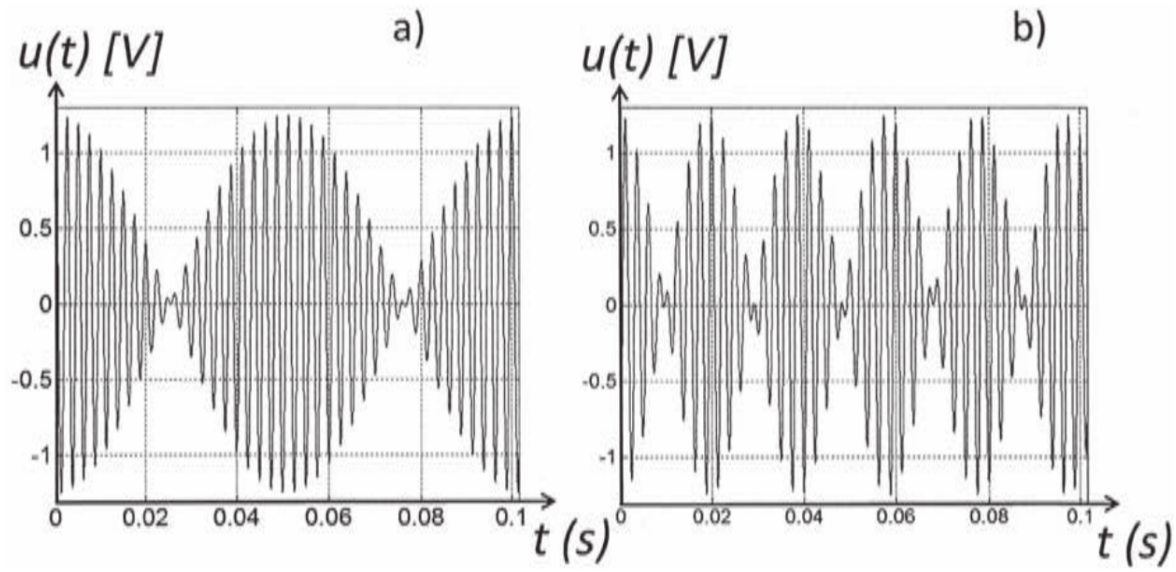
5. Calculer le déphasage $\varphi(x)$ de $u(t)$ par rapport à $e(t)$. Quelle information sur le déplacement fournit-il ?

II. Analyse des signaux par oscilloscope

Lorsque le capteur capte un mouvement, on peut considérer les calculs précédents valables pour $x(t)$ variable à condition que x varie suffisamment lentement par rapport à ω. Le montage en pont précédent permet donc d'obtenir la tension $u(t)$ comme produit de deux composantes « électrique » $[B\cos(\omega t)]$ et « mécanique » $[x]$: $u(t) = B\cos(\omega t).x(t)$. Ci-dessous, on présente la tension $u(t)$ acquise par un oscilloscope numérique, dans les deux cas suivants :

$$a) \quad x(t) = X_m \cos(\Omega_1 t) \qquad \text{et} \qquad b) \quad x(t) = -X_m \cos(\Omega_2 t)\,,$$

avec $\Omega_1 < \Omega_2 < \omega$.



6. Décomposer en série de Fourier le signal $u(t)$. Représenter graphiquement le spectre de Fourier en amplitude de $u(t)$ dans chacun des deux cas précédents.

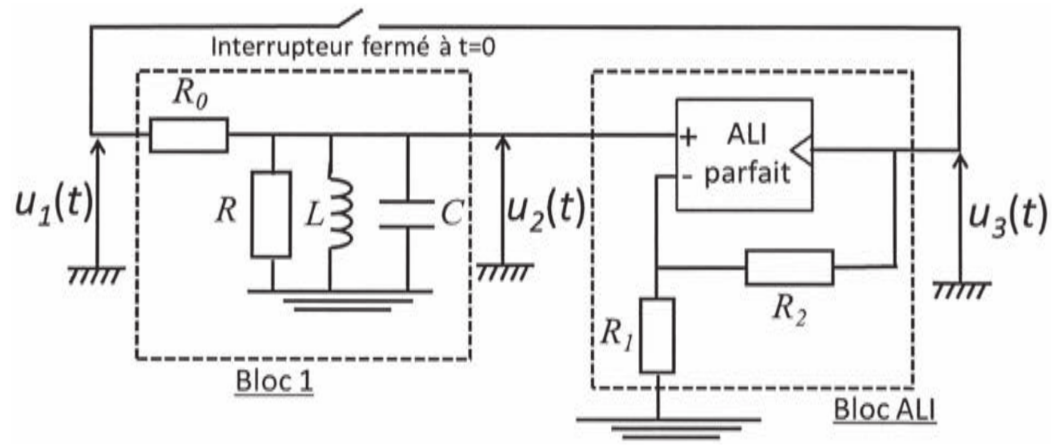
7. Déterminer numériquement, à partir de l'enregistrement de la figure a) ci-dessus :
— la fréquence f_e de la partie « électrique » de $u(t)$;
— la fréquence f_m de la partie « mécanique » de $u(t)$.
De même pour l'enregistrement de la figure b) ci-dessus, déterminer la fréquence f_m de la partie « mécanique » de $u(t)$.

8. En déduire les valeurs numériques des pulsations Ω_2 et Ω_1 mesurées.

* * * Tourner SVP * * *

III. Conditionnement des signaux par oscillateur

L'information de déplacement en provenance de capteurs capacitifs, tels que celui étudié dans la partie **I.**, peut également être extraite à partir d'un oscillateur électronique. Dans ce cas, l'information de déplacement induit une modification de C qui génère une modification de la fréquence de résonance de l'oscillateur, aisément détectable, par exemple à l'aide d'un fréquencemètre.
On considère le montage électronique de la figure ci-dessous.



9. Étude du bloc 1. On se place en régime sinusoïdal forcé. Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $A_0 = 0,1$, $Q = 25$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\log(25) \approx 1,4$.

- **a)** Etablir les équations des deux asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.
- **b)** Représenter le diagramme de Bode (en amplitude uniquement) donnant ce gain en décibels en fonction de $\log(x)$ (asymptotes et allure de la courbe réelle, valeurs particulières).
- **c)** Préciser la nature de ce filtre. Montrer qu'il existe une résonance, et pour quelle valeur de x. Que vaut alors le déphasage entre u_2 et u_1 ?
- **d)** Etablir l'expression de la largeur de la bande passante Δx.
- **e)** Exprimer, à partir du schéma du bloc 1, la fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de ω et des valeurs caractéristiques des composants de ce bloc 1. Par identification, donner les expressions littérales de ω_0, A_0 et Q en fonction des valeurs caractéristiques des composants.

10. Étude du bloc ALI.
On se place toujours en régime sinusoïdal forcé. Les seuls éléments à connaître pour déterminer les comportement de ce bloc sont les suivants :

- Les courants i_+ et i_- entrant respectivement dans les deux bornes $+$ et $-$ de l'ALI parfait sont nuls : $i_+ = i_- = 0$.
- Les potentiels v_+ et v_- sont égaux : $v_+ = v_-$.

- **a)** Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{G} = \dfrac{\underline{u_3}}{\underline{u_2}}$.
- **b)** En déduire l'expression de son module $K = |\underline{G}|$ en fonction de R_1 et R_2.

11. Système bouclé.
On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

- **a)** Déduire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par u_3. Cette équation est valable en régime quelconque.
- **b)** En déduire une condition liant A_0, K et Q permettant que $u_3(t)$ varie sinusoïdalement. Exprimer alors la fréquence f_0 de ces oscillations.

12. Application au capteur.
On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements x de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi $C = C_0(1 - x/\ell)$, avec $C_0 = 10\ \mu\text{F}$ et $\ell = 10$ mm. Ce capteur forme le condensateur du bloc 1 de la figure ci-dessus.

- Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence f_{osc} liée à la capacité C par la relation $f_{\text{osc}} = \dfrac{D}{\sqrt{C}}$ avec $D = 1,0\ \text{H}^{-1/2}$.
- À la position de référence du capteur ($x = 0$), la fréquence d'oscillation est f_{or}.

a) Montrer que, pour un petit déplacement x ($x \ll \ell$), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{\text{osc}} \approx ax + b$, et expliciter a et b en fonction des données.
On rappelle le développement limité usuel suivant : $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ *pour* $\varepsilon \ll 1$.

b) On note $\Delta f = f_{\text{osc}} - f_{\text{or}}$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{\min} = 3$ Hz. Quel est le plus petit déplacement détectable ?

* * * Fin de l'épreuve * * *