EX P SATL

Mécanique

TD 18
Satellites

Exercice 1

1) Exprimer la vitesse v et la période T d'un satellite de masse m en orbite circulaire autour de la terre, en fonction de g_0, R_T et h (altitude).
A.N : altitude h=500 km ; g_0=9,81 ms^{-2} ; R_T=6370 km.

2) En déduire, dans le cas de la trajectoire circulaire, la 3ème loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3}$=K. Calculer K.

Exercice 2

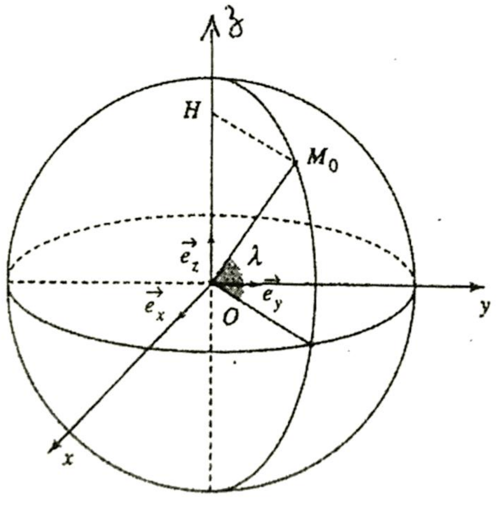
Un satellite est mis en orbite en M_0 (distance r_0) autour de la terre avec une vitesse $\vec{v}_0$ orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. Soit v la vitesse en orbite circulaire (rayon r_0). On pose $\lambda=\frac{r_0}{R_T}$.

Démontrer que le satellite n'échappera pas à l'attraction Terrestre et ne rencontrera pas la terre si

$$\frac{2}{1+\lambda}<\left(\frac{v_0}{v}\right)^2<2.$$

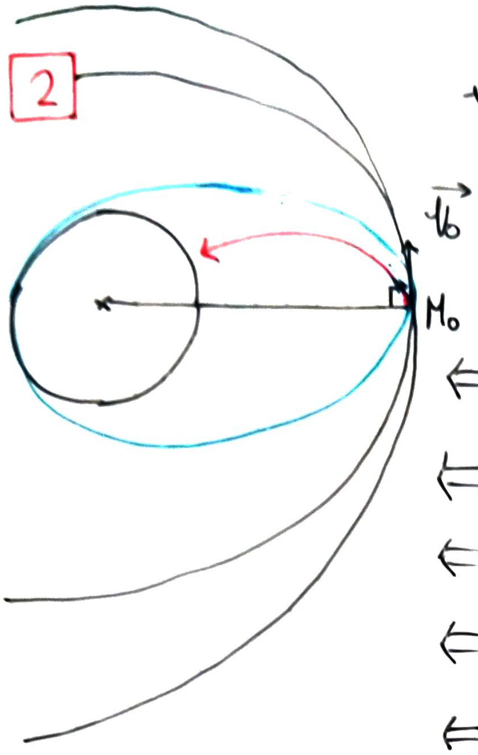
Exercice 3

Un satellite de masse m est lancé en M_0 située à la latitude λ.
Quelle énergie ΔE faut-il lui fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon r ?
On exprimera ΔE en fonction de m, λ, g_0, R_T, ω_T (vitesse de rotation de la terre dans le référentiel géocentrique (O, $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$). Commentaire ?



EX SATL

$\boxed{2}$



$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$ (notation)

Le satellite n'échappe pas à la Terre

$\Leftrightarrow$ la trajectoire est en état lié

$\Leftrightarrow E_m < 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_T m}{r_0} < 0$

$\Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}$

$\Leftrightarrow v_0^2 < 2\frac{GM_T}{r_0}$ car $id^2 \in \nearrow$

$\Leftrightarrow v_0^2 < 2v^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 < 2$

Il ne recontre pas la Terre

$\Leftrightarrow 2a > R_T + r_0$

$\Leftrightarrow E_m > -G\frac{M_T m}{R_T + r_0}$

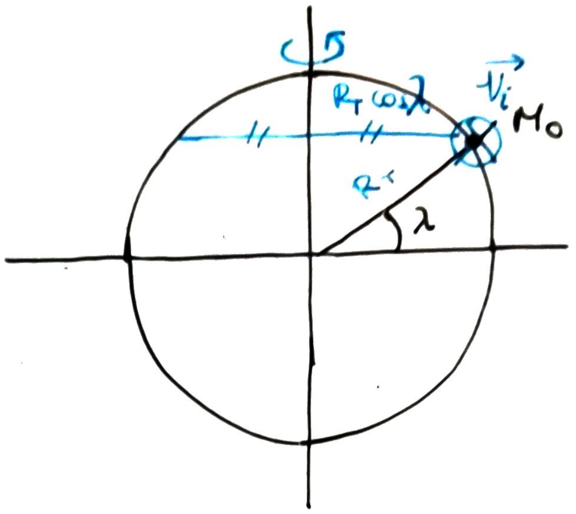
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_T m}{r_0} > -G\frac{M_T m}{R_T + r_0}$

$\Leftrightarrow v_0^2 > 2GM_T\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R_T + r_0}\right)$

$\Leftrightarrow v_0^2 > 2GM_T \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{1+\lambda}$ v^2

$\Leftrightarrow v_0^2 > 2v^2 \cdot \frac{1}{1+\lambda}$

3



$$\Delta E = E_f - E_i = -G\frac{M_T m}{2r} - \left(E_{c_i} + E_{p_i}\right)$$

$$= -G\frac{M_T m}{2r} - \left(\frac{1}{2}m\left(R_T \omega_T \cos\lambda\right)^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

ΔE petit $\Leftrightarrow$ $\cos\lambda$ grand $\Leftrightarrow$ λ petit

$\Leftrightarrow$ m petit

2

Le satellite n'échappe pas à l'attraction Terrestre

$\Leftrightarrow$ la trajectoire est en état lié

$\Leftrightarrow$ $E_m < 0$

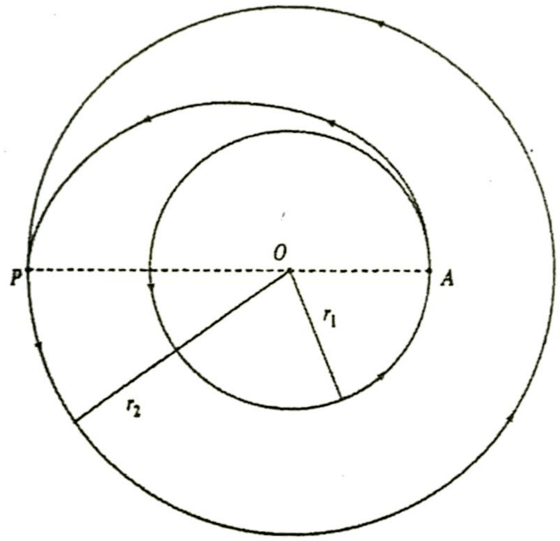
or $\dot{E}_m = 0$

donc $\forall t$, $E_m = E_m(0)$

Exercice 4 :

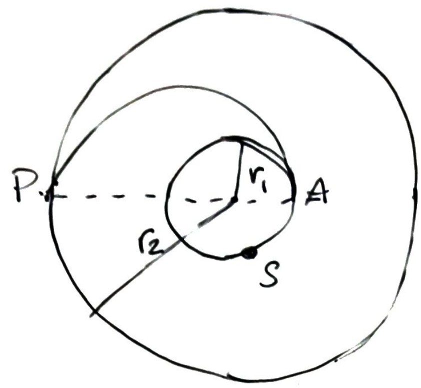
On veut transférer un satellite S de masse m initialement en orbite circulaire basse de rayon $r_1=6400+500$ km autour de la terre à une orbite circulaire haute de rayon $r_2=6400+36000$ km.
On utilise une ellipse de transfert (appelée ellipse de Hohmann) dont l'un des foyers est la Terre (de $A \rightarrow B$)

1) Exprimer puis calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.
2) Exprimer l'énergie mécanique E_1 du satellite sur sa trajectoire basse.
3) Exprimer l'énergie mécanique E_3 sur l'ellipse de transfert.
4) Exprimer et calculer le supplément de vitesse à donner au satellite Δv_A en A.
5) Faire le même raisonnement en B qu'au 4)
6) Quelle est la durée du transfert.



EXP SAT2

$\boxed{4/1}$



(cours)

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = 7{,}6 \ km \cdot s^{-1}$$

$\boxed{4/2}$

$$E_m = E_c + E_p$$
$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{K}{r_1}$$
$$=$$
$$=$$
$$= -G\frac{M_T m}{2r_1} \quad (= -E_c)$$

$\boxed{4/3}$

$$E_{m_{ellipse}} = \frac{K}{2a} = -G\frac{M_T m}{2a} = -G\frac{M_T m}{r_1 + r_2}$$
$$= E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{0^+}^2 - \frac{GM_T m}{r_1}}_{\text{en } A\ (0^+)}$$

en 0^- = en 0^+ par $\mathcal{C}$ de E_m

$\boxed{4/4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_{0^+}^2 - G\frac{M_T m}{r_1} = -G\frac{M_T m}{r_1+r_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} v_{0^+}^2 = G\frac{M_T}{r_1} - G\frac{M_T}{r_1+r_2}$$
$$\Leftrightarrow v_{0^+} = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_T r_2}{r_1(r_1+r_2)}} = 10 \ km \cdot s^{-1}$$

$\boxed{4/5}$

$$v_{B_{cercle}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} = 3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

et à la fin de l'ellipse $E_m = E_c + E_p = -G\frac{M_T m}{r_2 + r_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_{B^+}^2 - G\frac{M_T m}{r_1 + r_2} = -G\frac{M_T m}{r_2 + r_1}$$

$$\Leftrightarrow v_{B^+} = \sqrt{\frac{2GM_T r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

$$= 1{,}6 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

$\boxed{4/6}$

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

D'après la 3e loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{a^3 4\pi^2}{GM_T}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3 \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

$$= 19 \text{ ks}$$

$$= 5\text{h} + 20 \text{ min}$$

Exercice 5:

La Terre possède un seul satellite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre, dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense…

Cette partie se propose d'étudier quelques caractéristiques du mouvement des satellites terrestres.

Dans cette partie, on désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre.
On donne $R_T = 6370$ km, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg.
On rappelle que la constante de gravitation universelle a pour valeur $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m².kg⁻².

B.2. Quelques aspects de la satellisation

En l'absence de précision explicite, on négligera tout frottement dû à l'atmosphère sur le satellite.

B.2.1. On s'intéresse à un satellite artificiel, de masse m, en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.

B.2.1.a. Montrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme, et exprimer littéralement la vitesse v_0. On exprimera d'abord v_0 en fonction de G, M_T et R, puis en fonction de g_0, R_T et R, où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre.

B.2.1.b. Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude h = 832 km au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

1.c. Calculer la période de révolution du satellite T

B.2.2. La vitesse de libération v_l d'un satellite est la plus petite vitesse qu'il faut lui communiquer à la surface de la Terre pour qu'il aille à l'infini (en « se libérant » de l'attraction terrestre). Exprimer v_l en fonction de G, M_T et R_T et calculer sa valeur.

B.2.3. Dans le cas d'une orbite circulaire du satellite autour de la Terre, montrer que l'énergie mécanique E_m du satellite est liée à son énergie cinétique E_c par : $E_m = - E_c$.
Si l'on tient à présent compte de la force de frottement de l'atmosphère sur le satellite, en déduire, en le justifiant, son effet sur la vitesse du satellite.

B.2.4. Pour un satellite de masse m en mouvement (quelconque) autour de la Terre, et uniquement soumis à la force gravitationnelle terrestre, l'énergie mécanique peut s'écrire de la même façon que celle d'un point matériel en mouvement rectiligne placé dans un potentiel effectif $U_{eff}(r)$ dont la courbe représentative est donnée sur la figure 4 :

$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}(r)$ avec r la distance du satellite au centre de la Terre.

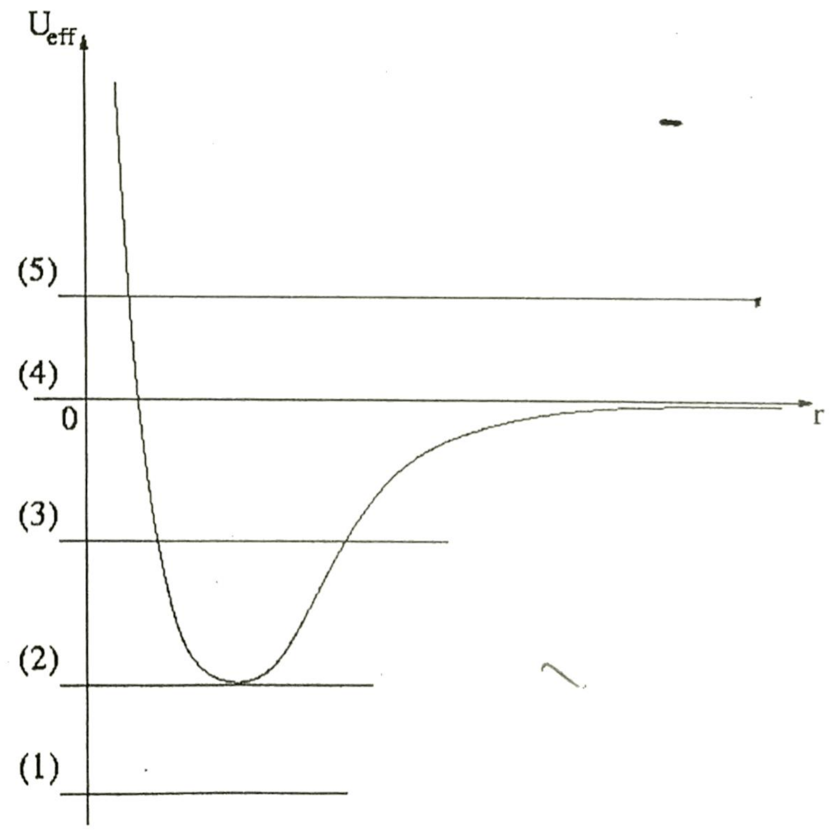
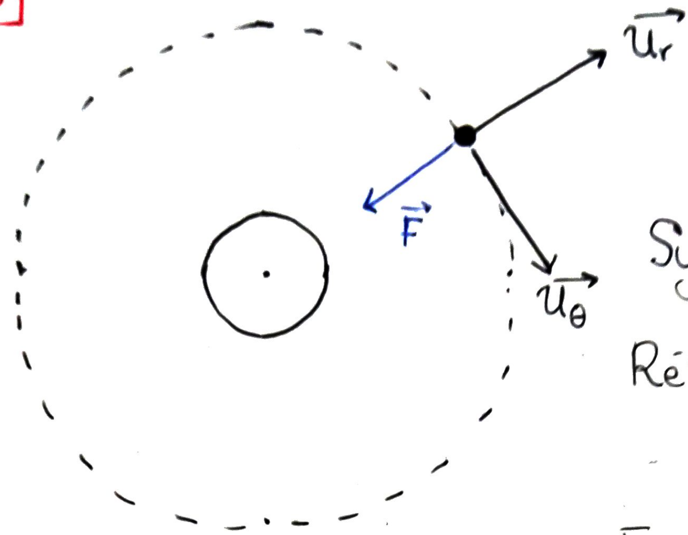


Figure 4

Après avoir justifié que l'énergie mécanique E du satellite est une constante de son mouvement, préciser, pour chacune des valeurs de E (notées de (1) à (5)) représentées sur la figure 4, la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état, lié ou de diffusion.

EXPSATL

$\boxed{5/1/a+b}$



Syst: $\{M\}$

Réf: Géocentrique, supposé Galiléen

Forces: $\vec{F} = -G\frac{M_T m}{R^2}\overrightarrow{u_r}$

Vecteurs position, vitesse & accélération:

$$\overrightarrow{TR} = R\overrightarrow{u_r}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$

2e loi de Newton, projetée:

$$\begin{cases} /\overrightarrow{u_r} & -mR\dot{\theta}^2 = -G\frac{M_T m}{R^2}\overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R}} \text{ d'après } (\vec{g_0}) \\ /\overrightarrow{u_\theta} & mR\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \text{const} \Leftrightarrow \text{MCU} \end{cases}$$

$$v_0 = \dot{\theta}(0) = -G\frac{M_T}{R} = [7\ 400 \text{ m s}^{-1}$$ $\boxed{5/1/b}$

$$\vec{F} = -G\frac{M_T m}{R^2}\overrightarrow{u_r} = -G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_r}$$

Au sol, $h=0$: $\vec{g_0} = -G\frac{M_T}{R_T^2}\overrightarrow{u_r}$ $(\vec{g_0})$

$$\Leftrightarrow g_0 R_T^2 = GM_T$$

$\boxed{5/1/c}$

$$T = \frac{2\pi}{\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}} = \frac{2\pi}{\frac{v}{R}} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$$

$$= \frac{2\pi(6\,370 + 832)\cdot 10^3}{7\,400}$$

$$= 6{,}12 \text{ ks}$$

$$= 1{,}7 \text{ h}$$