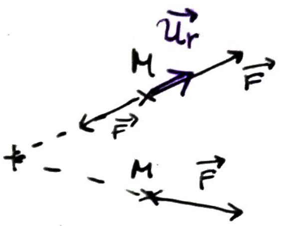
Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

I Forces centrales conservatives

def force centrale

Toujours dirigée vers le même point O



$$\vec{F} = \underbrace{F(r)}_{\text{projection}}\,\vec{u_r}$$

Si elle est conservative

$$\exists\, E_p \,/\quad \delta W = -dE_p$$

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{OM} = F(r)\,\vec{u_r}\cdot\left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}\right) = F(r)\,dr = -dE_p$$

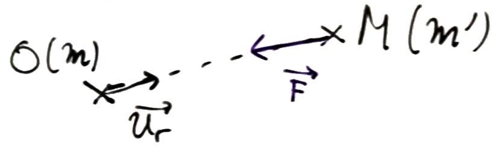
$$\Rightarrow F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

remq Force centrale conservative

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{F} = F(r)\,\vec{u_r} & \vec{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \\ F(r) = -\dfrac{dE_p}{dr} & \end{array}}$$

2 Exemples

Force gravitationnelle



$$\vec{F} = -G\,\frac{mm'}{r^2}$$

remq $\vec{F} = m'\vec{g}$ où $\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u_r}$ le champ de pesanteur

remq énergie gravitationnelle E_p

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{Gmm'}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -\frac{Gmm'}{r} + \text{const}}$$

La force électr$\left\{\text{ique, ostatique}\right\}$ exercée par O sur M

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$ où ε_0 "permittivité du vide"

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \text{ SI}$$

remq

$\vec{F} = q_2 \vec{E}$ où $\vec{E}$ désigne le champ électrique

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

remq

$$F(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}$$

généralisation

$$\boxed{\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u_r} : \text{centrale conservative}}$$

$K > 0$ répulsive	$K < 0$ attractive
électrostatique $K = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$	gravitationnelle $K = -Gmm'$
	électrostatique $K = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$
$\text{sgn}\, q_1 = \text{sgn}\, q_2$	$\text{sgn}\, q_1 \neq \text{sgn}\, q_2$

$$\exists\, E_p \,/\, F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = \frac{K}{r^2} \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{K}{r} + \text{const}}$$

II Lois de conservation

On suppose que M est soumis, dans un réf. Galiléen, à la seule force $\vec{F} = K/r^2 \, \vec{u_r}$

1 Conservation du moment cinétique

Syst : $\{M\}$, Réf. Galil

TMC en O :

$$\frac{d\vec{L_o}(M/R_g)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$
$$= \vec{OM} \wedge \frac{K}{r^2} \vec{u_r}$$
$$= \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L_o}(M/R_g) = \vec{\text{const}}}$$
$$= \vec{OM} \wedge m\vec{v} \quad \forall t$$
$$= \vec{OM_0} \wedge m\vec{v_0} \quad @ t=0$$

Le moment cinétique est constant

CONSÉQUENCE

$$\forall t, \ \vec{L_o} \perp \vec{OM}$$
$$\perp \vec{v}$$

$$\forall t, \ \vec{OM} \perp \vec{L_o}$$

Le mouvement de M est plan, dans le plan $\begin{cases} \perp \vec{L_0} \\ \ni O \end{cases}$

remq Si $(t=0 \Rightarrow \vec{OM_0} \parallel \vec{V_0})$

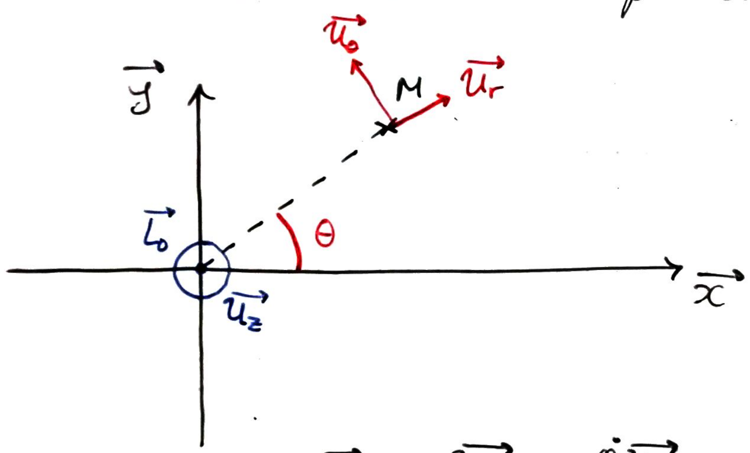
$\vec{L_0} = \vec{const} = \vec{0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

Alors $\forall t \ \vec{OM} \parallel \vec{v}$

Donc le mouvement est rectiligne

CONSÉQUENCE

On travaille en coordonnées planes :



$\vec{OM} = r\vec{u_r}$ $\quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$

$= \vec{const}$

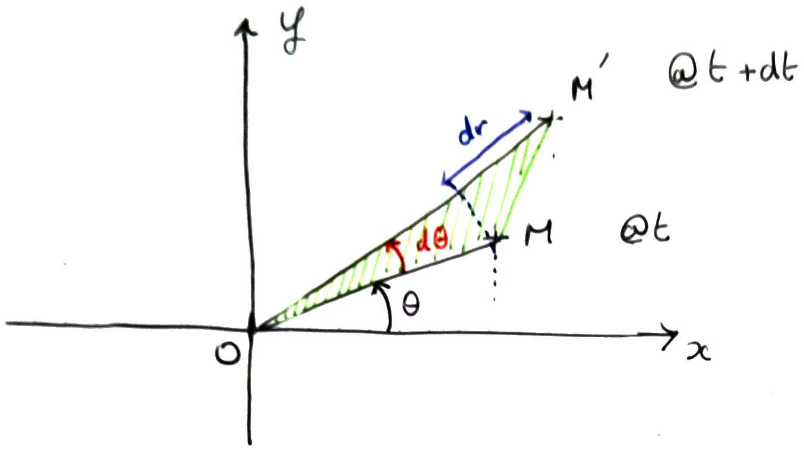
$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = const$ « Constante des aires »

$\vec{L_0} = mC\vec{u_z} = \vec{const}$

rem

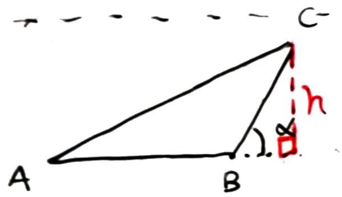
$r^2\dot{\theta}$ const $\not\Rightarrow$ r^2 const ou $\dot{\theta}$ const

CONSÉQUENCE



L'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant la durée dt

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A} &= \text{aire du triangle } OMM' \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|r\overrightarrow{u_r} \wedge (dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta})\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|r^2 d\theta\,\overrightarrow{u_z}\right\|
\end{aligned}$$



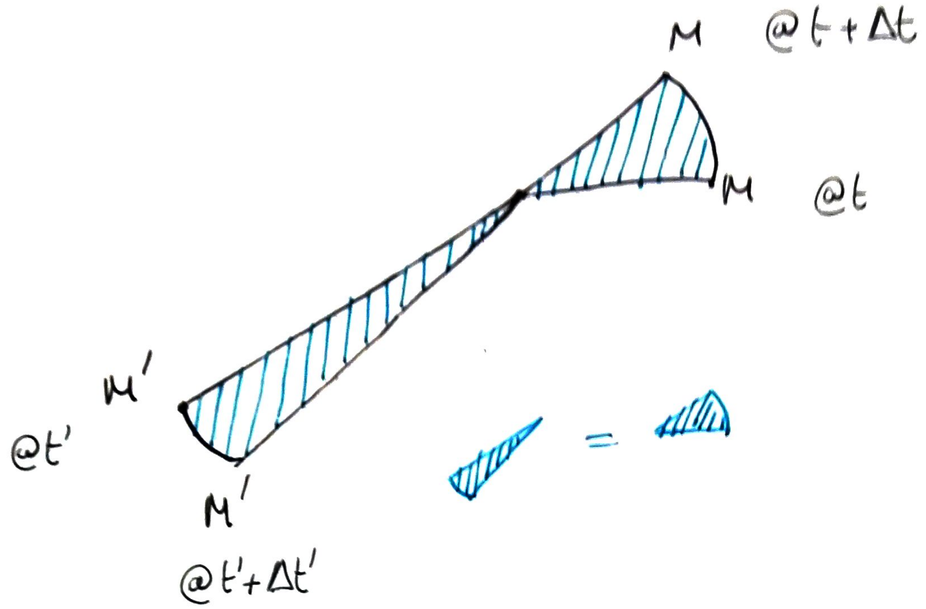
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| \\
&= \frac{1}{2} AB \underbrace{BC\,|\sin\alpha|}_{h}
\end{aligned}$$

TAC'dessin

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 d\theta \rightarrow \boxed{\dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2} = \text{const}}$$

L'aire balayée par unité de temps est constant

$\Leftrightarrow$ la vitesse aréolaire $\mathcal{A}$ est constante



2 Conservation de l'énergie mécanique

Pour le m̂ point M

TEM $\Delta E_m = W(\overrightarrow{F_{nc}}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{E_m = \text{const}}$

L'énergie méca. se conserve

Conséquence

$$E_m = E_c + E_p$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r}$$

or $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \Rightarrow E_m(\dot{r}^2 + r^2\underbrace{\dot{\theta}^2}) + \frac{K}{r}$

$C = r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{\substack{\text{énergie cinétique} \\ \text{RADIALE} \\ E_{c_r}(r)}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{K}{r}}_{\substack{\text{énergie potentielle} \\ \text{effective} \\ E_{p_{eff}}(r)}}$$

3 Trajectoire ↔ $E_{p_{eff}}$

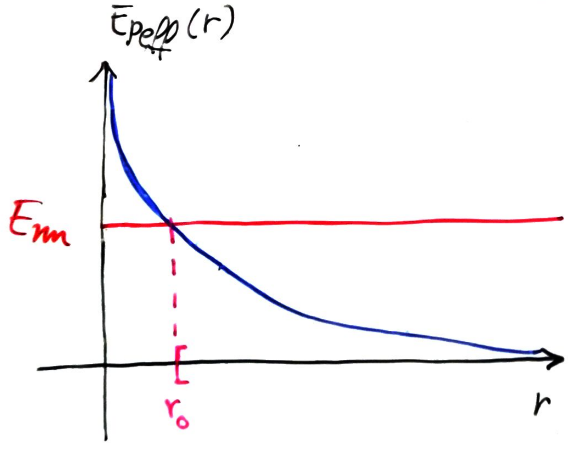
$$E_m = E_{c_r} + E_{p_{eff}}(r)$$

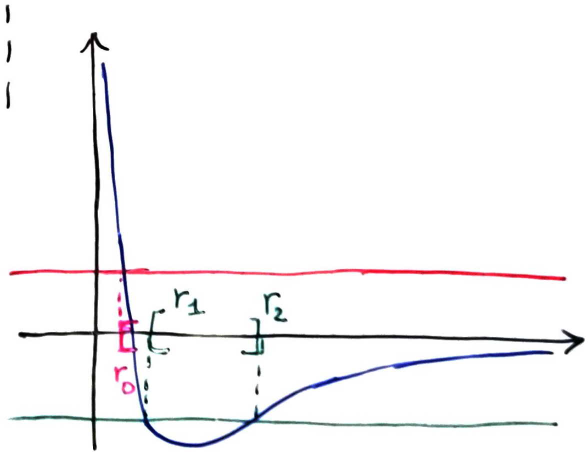
or $E_{c_r} \geq 0$

alors $\begin{cases} E_m = \text{const} \\ E_m \geq E_{p_{eff}} \end{cases}$

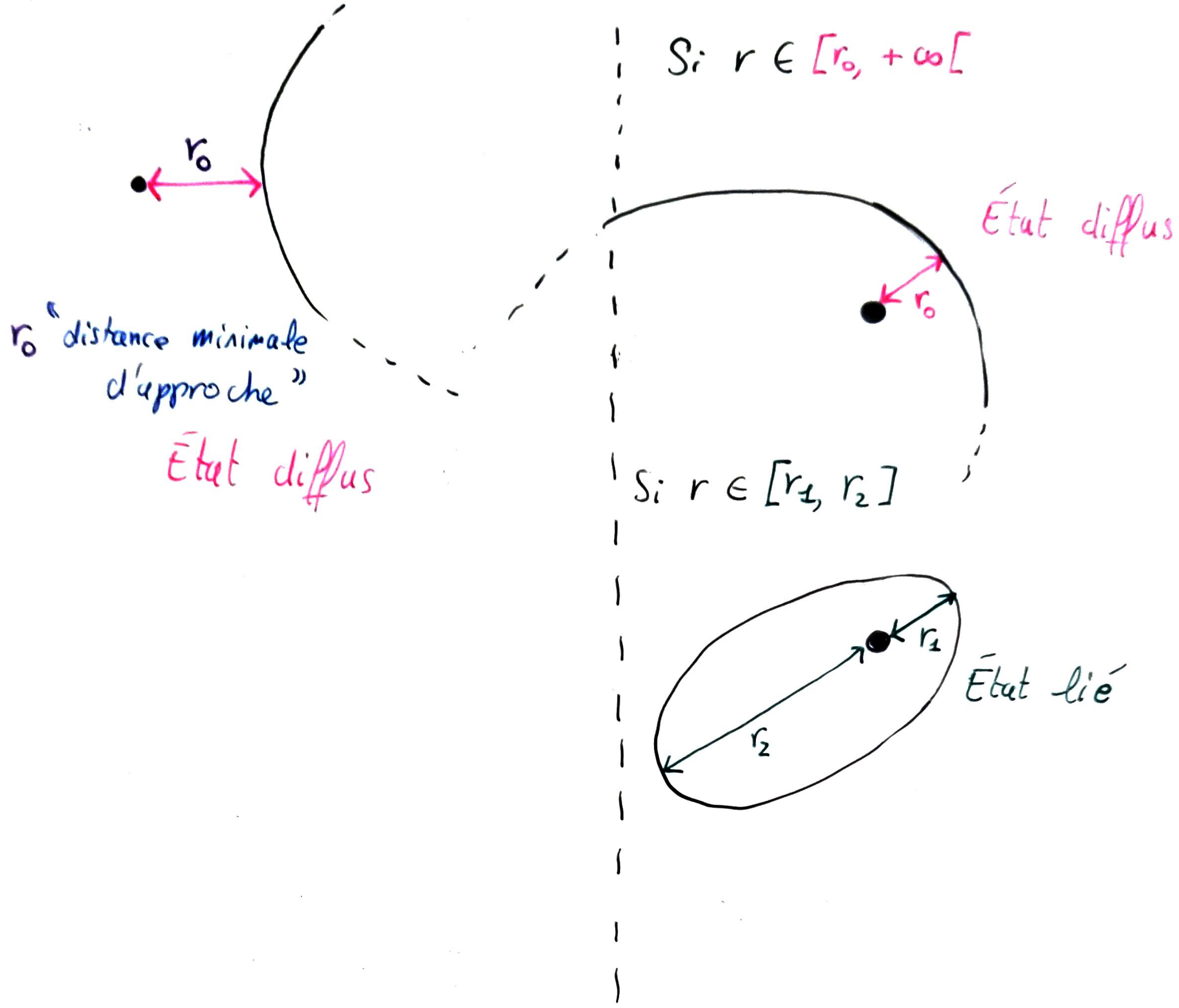
$K > 0$ répulsive | $K < 0$ attractive

$$E_{p_{eff}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{K}{r}$$



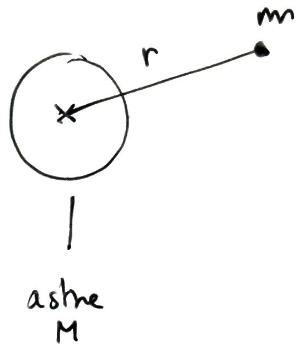


$r \in [r_0, +\infty[$ car $E_m \geq E_{p_{eff}}(r)$


Si r ∈ [r0, +∞[
r0
r0 "distance minimale d'approche"
État diffus
État diffus
r0
Si r ∈ [r1, r2]
r1
r2
État lié

III Champ Newtonien gravitationnel

$\vec{F} = \frac{k}{r^2}\vec{u_r}$ attractive, centrale, conservative

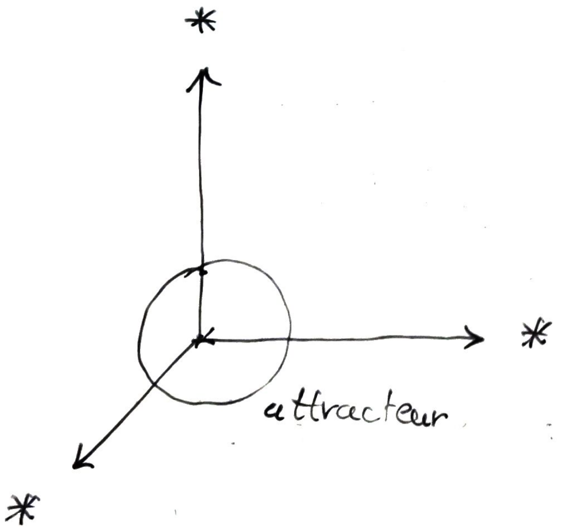


$k = -GMm < 0$

$\exists E_p, \ \delta W = -dE_p = F(r)dr$

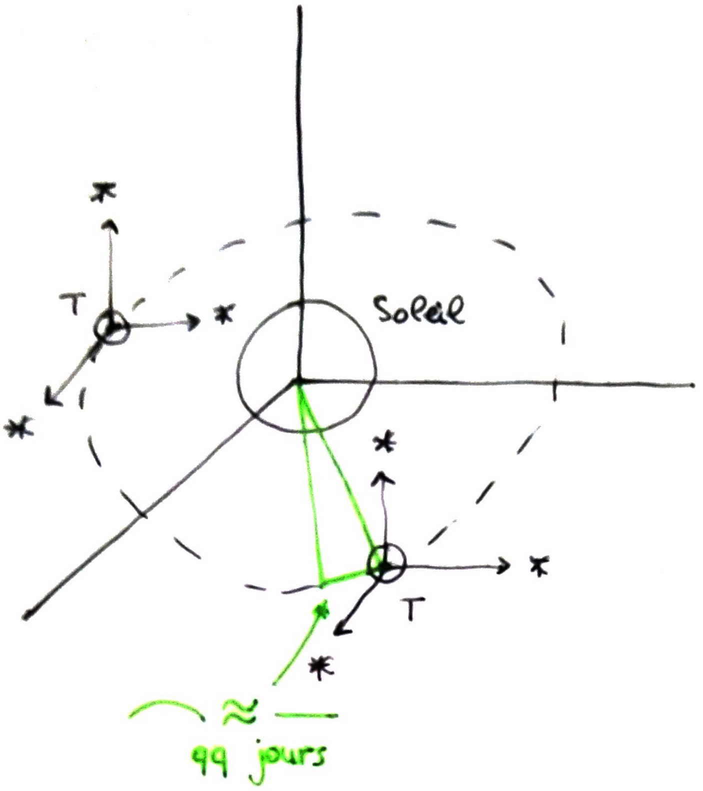
$\frac{k}{r^2} = F(r) = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow E_p = \frac{k}{r} + \text{const}$

1 Référentiels d'étude



Centre : centre de l'astre
Axes : 3 axes qui pointent vers 3 étoiles * lointaines et fixes

Si astre = Terre
référentiel : Géocentrique
Si astre = Soleil
référentiel : Héliocentrique / de Kepler
Si centre = centre de masse du syst solaire
référentiel : Copernic



Approximation :

- Réf de Copernic est le réf Galiléen absolu
- Réf héliocentrique ≈ réf copernic
  car Masse syst solaire ≈ masse soleil
- Réf géocentrique est en translation circulaire autour du soleil. ≠ TRU / ref Galilé
  ⇒ il n'est pas Galiléen
  sur 99 jours, le déplacement est approximé à un segment de droite donc il est Galiléen

remq

Réf Géocentrique ≠ Réf {Terrestre / du labo}

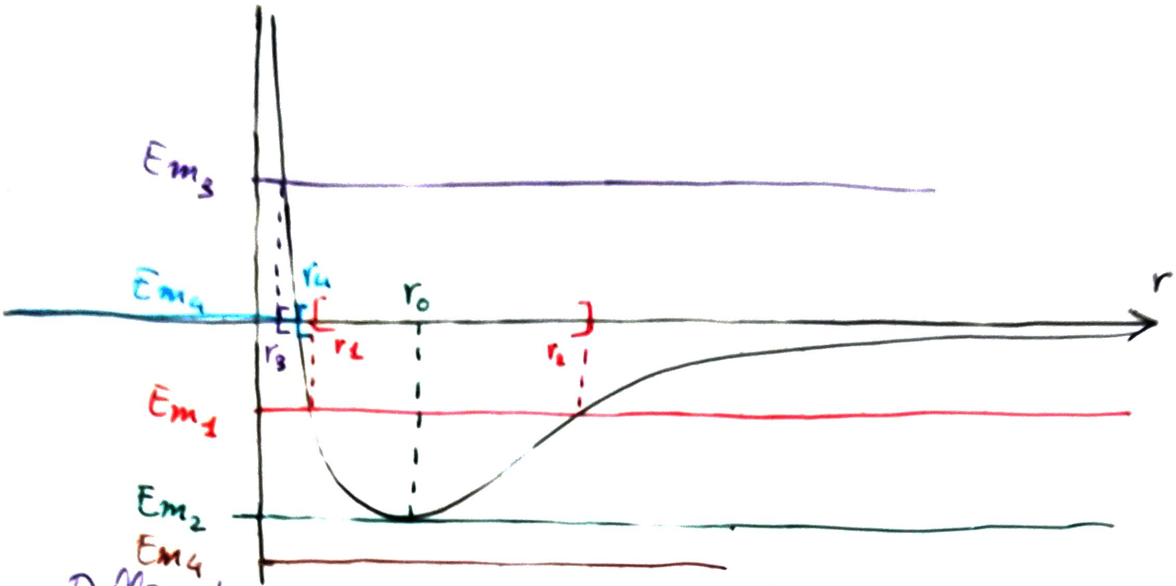
car il est en double rotation autour de Kepler

2 Nature des trajectoires

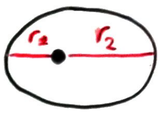
On a montré que

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} + \frac{k}{r} = \text{const}$$

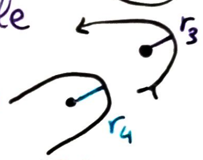
$$\Rightarrow E_m \geq E_{p_{eff}}(r)$$



Différents cas

1^{er} cas $r \in [r_1, r_2]$: ellipse  état lié

2^e cas $r = r_0$: cercle  état lié

3^e cas $r \in [r_3, +\infty[$: hyperbole  état diffus

4^e cas $r \in [r_4, +\infty[$: parabole état diffus

5^e cas — — — IMPOSSIBLE — — —

remq

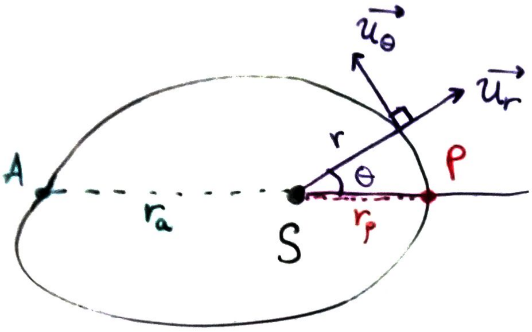
Les 4 types de trajectoires font partie de la famille des coniques.

3 Trajectoires de Kepler

1ère loi de Kepler

- Les planètes ont des trajectoires elliptiques autour du Soleil

- Le Soleil est l'un des deux foyers de l'ellipse



L'équation polaire de l'ellipse

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

p paramètre

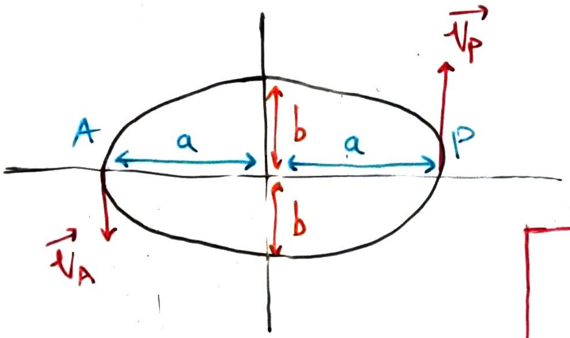
e excentricité $\in \,]0, 1[$

Lorsque $\theta = 0$ "périhélie"

$$r = \frac{p}{1+e} =: r_{min} = r_1$$

Lorsque $\theta = \pi$ « aphélie »

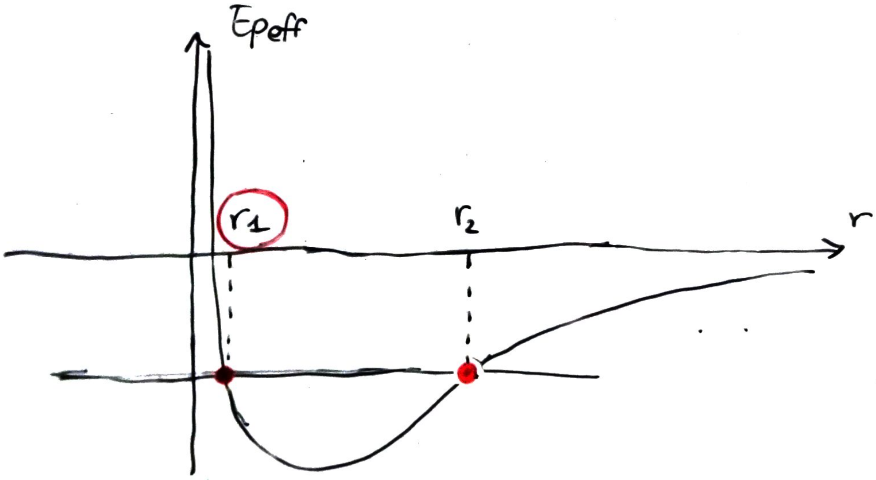
$$r = \frac{p}{1-e} =: r_{max} = r_2$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boxed{\begin{array}{l} a \text{ demi grand-axe} \\ AP = 2a = r_a + r_p = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1+e^2} \end{array}}$

En A et P



$E_m \geq E_{p_{eff}}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r)$$

$\dot{r}_a + \dot{r}_p = 0$ or $\vec{v} = \dfrac{d(r\vec{u_r})}{dt} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

Alors en A et B : $\vec{v_A}, \vec{v_B} \parallel \vec{u_\theta}$

remq

$\vec{\cdot}$ orthoradial $\Leftrightarrow \vec{\cdot} \parallel \vec{u_\theta}$

or $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

ici $\vec{L_S} = \vec{SM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u_r} \wedge m\underbrace{r\dot{\theta}\vec{u_\theta}}_{\vec{v}} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u_z} = mrv\vec{u_z}$

or $\vec{L_S} = \vec{const}$

$\Rightarrow \|\vec{L_S}\| = const = mrv$

$\cancel{m} r_a v_a = \cancel{m} r_p v_p$

donc : en A et B $\dfrac{\vec{v_a}}{\vec{v_p}} \parallel \vec{u_\theta}$

$r_a v_a = r_p v_p \Rightarrow v_a < v_p$

Expression de l'énergie mécanique

En A et en P :

$E_m = \cancel{\frac{1}{2}m\dot{r}^2} + E_{p_{eff}}(r)$

$\Leftrightarrow \quad E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_s m}{r}$

r_a et r_b sont solutions de l'équation :

$$E_m r^2 + GM_S m r - \frac{1}{2} m C^2 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-GM_S m \pm \sqrt{\Delta}}{2E_m}$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = r_a + r_p = 2a = \frac{-GM_S m}{E_m}$$

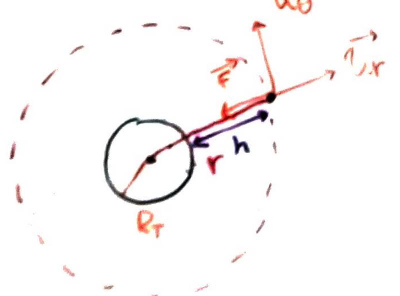
$$\Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{GM_S m}{2a} = \underline{\text{const}} < 0}$$

orbite elliptique

rem : Dans le cas d'une orbite elliptique
Il est impossible de connaître v pour t quelconque
(Mais en A et P on peut)

4 Trajectoires circulaires

On considère un Satellite en orbite circulaire autour de la Terre.



Syst : {M}
Réf : géocentrique Galiléen
Forces :

- $\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r^2} \cdot \vec{u_r}$

Vecteur accélération:

$$\vec{TS} = r\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

2ᵉ loi de N projetée

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = -G\dfrac{M_T m}{r^2} \\ mr\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \text{const} \Rightarrow \text{MCU} \end{cases}$$

On a:

$$\dot{\theta} =: \omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r^3}}$$

Donc:

$$\boxed{v = r\dot{\theta} = r\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}}$$

car $\vec{F} = -\dfrac{GM_T m}{r^2}\vec{u_r} = -\dfrac{GM_T m}{(R_T+h)^2}\vec{u_r}$

devient au sol:

$$\vec{F} = -\frac{GM_T m}{R_T^2}\vec{u_r} = m\vec{g_0} = -mg_0\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

3 min MAX

Période de révolution

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v}{r}} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{GM_T}{r^3}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \text{const} \not\ni m}$$

3e loi de Kepler

Elle devient, pour une orbite elliptique :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

oui, boooooh....
on va pas tout redémontrer hein

L'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

$$= \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{GM_T}{r}}^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_m = -G\frac{M_T m}{2r} = \text{const} < 0 = -E_c}$$

orbite circulaire

cousine de $E_m = -G\frac{Mm}{a}$ pour l'ellipse

Remq Pour un satellite en basse orbite (ie. 99 100 km)

$\exists$ atmosphère $\Rightarrow \exists \vec{f}$ frottements

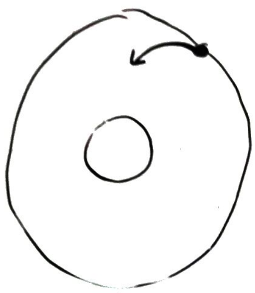
TEM $\Delta E_m = W(\vec{F_r}) - W(\vec{f}) < 0$

$\Rightarrow E_m \in \searrow$

or $E_m = -E_c$ alors $-E_c \in \searrow \Rightarrow E_c \in \nearrow$

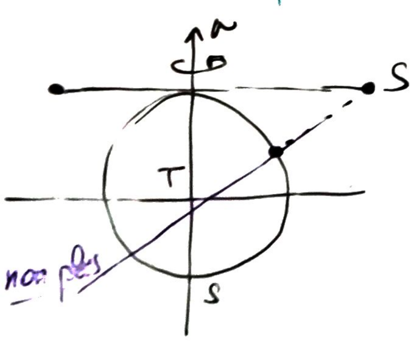
or $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

$\Rightarrow E_c \in \nearrow \Rightarrow v \in \nearrow \Rightarrow r \in \searrow$



pour éviter que le satellite chute,
on rajoute un moteur auxiliaire
pour le remettre en orbite de
temps - en - temps.

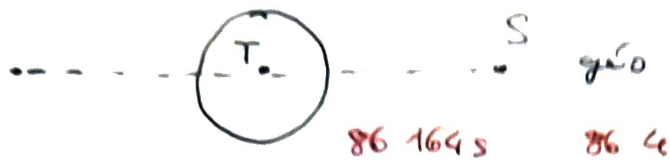
Cas des satellites géostationnaire reste à chaque instant à la verticale du même point sur Terre



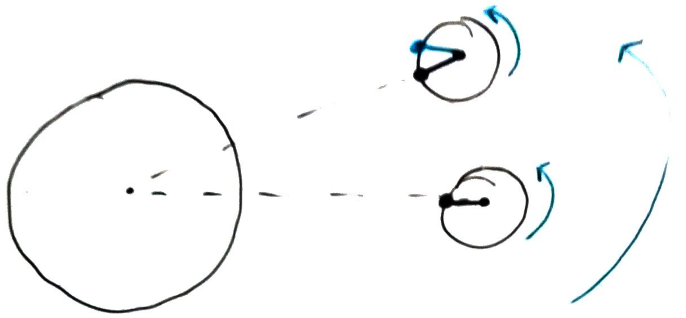
On a prouvé: S a une trajectoire plane dans le plan

$\begin{cases} \perp \vec{L} \\ \ni T \end{cases}$

Impossible d'avoir un satellite géostationnaire à Nîmes, ils sont nécessairement dans le plan de l'équateur



La période $T = \overbrace{T_{\text{sidéral}}}^{86\,164\text{ s}} \neq \overbrace{T_{\text{solaire}}}^{86\,400\text{ s}}$



$T_{\text{solaire}} = 1\text{ j}$

$T_{\text{sidéral}} < 1\text{ j}$

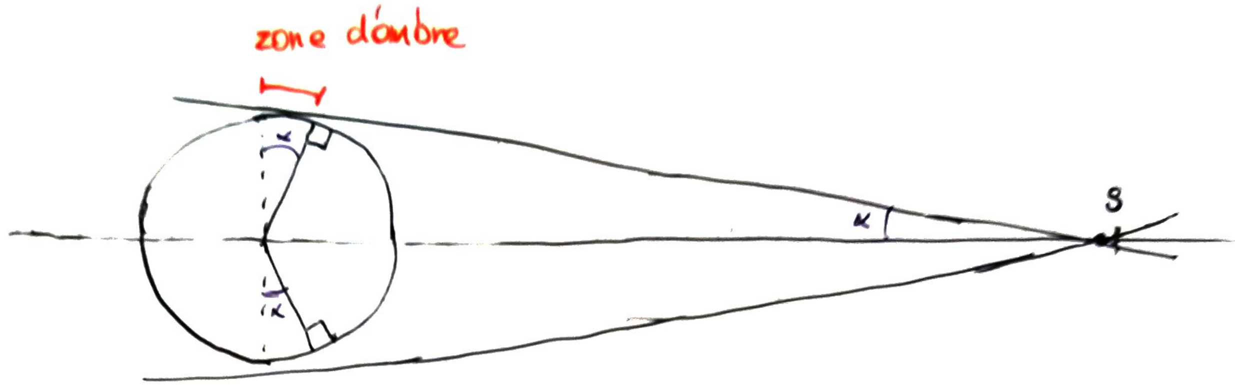
En un jour, la Terre a fait un petit peu plus qu'un tour

Ainsi la hauteur h du Satellite gravitationnaire:

$$\begin{cases} G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \text{SI} \\ M_T = 6\ 10^{24}\ \text{kg} \\ R_T = 6400\ \text{km} \end{cases}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 4{,}22\cdot 10^7\ \text{m} = R_T + h \Leftrightarrow h = 35\,800\ \text{km}$$

Sa vitesse: $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 3{,}08\ \text{km}\ \text{s}^{-1}$



$$\sin \alpha = \frac{R_T}{R_T + h} \Rightarrow \alpha = 8°$$

Un satellite géostationnaire permet la météo, les communications

M soumis à la force attractive $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\vec{u_r}$

3 lois de Kepler

1° Le mouvement est plan et l'un des foyers de la trajectoire est le $\underbrace{\text{centre attracteur}}_{\text{Soleil, ...}}$.

2° L'aire balayée ou la vitesse aréolaire est constante

3° $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_{attracteur}}$ pour les ellipses : a demi-axe
r rayon

$$E_m = \underbrace{\frac{K}{2a}}_{\text{ellipse}} = \underbrace{\frac{K}{2r}}_{\text{cercle}}$$

IV Vitesses cosmiques

Vitesses remarquables :

def 1ère vitesse cosmique v_{c_1}

La vitesse d'un satellite en orbite circulaire rasante autour de la Terre.

$$\boxed{v_{C_1} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}} = 7{,}9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

def Vitesse cosmique 2 v_{C_2} "Vitesse de libération"

- Vitesse qui permet de passer d'un état lié à un diffus

- Vitesse à comuniquer à un satellite depuis la Terre pour le libérer de l'attraction terrestre (= le perdre)

Elle est telle que :

$$E_m = 0 = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{C_2}^2}_{\text{cinétique}} - \underbrace{G\frac{M_T m}{R_T}}_{\text{potentielle}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} v_{C_2} &= \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \\ &= \sqrt{2}\, v_{C_1} \\ &= 11 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \\ &= 40\,000 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \end{aligned}}$$