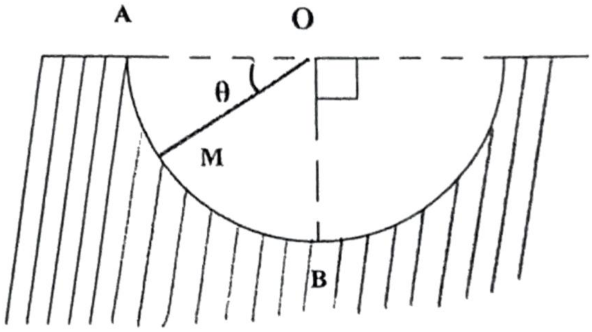
EXP MOC IN

Mécanique

TD 17 Théorème du moment cinétique

Exercice 1 :

Une particule ponctuelle de masse m peut glisser à l'intérieur d'une demi-sphère de centre O de rayon r. On lâche du point A sans vitesse initiale. Il n'y a pas de frottements.

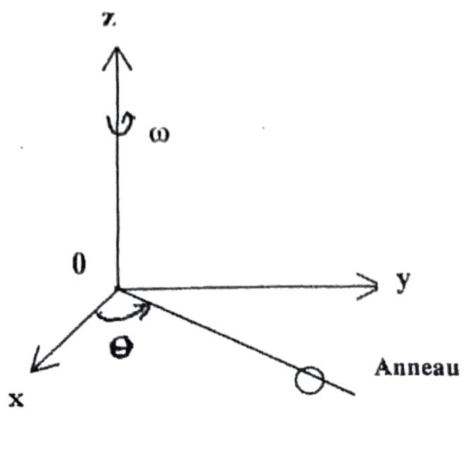


1) A l'aide du théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle du mouvement.
2) Exprimer la vitesse du point en M repéré par l'angle θ en fonction de g, r, θ.

Exercice 2 :

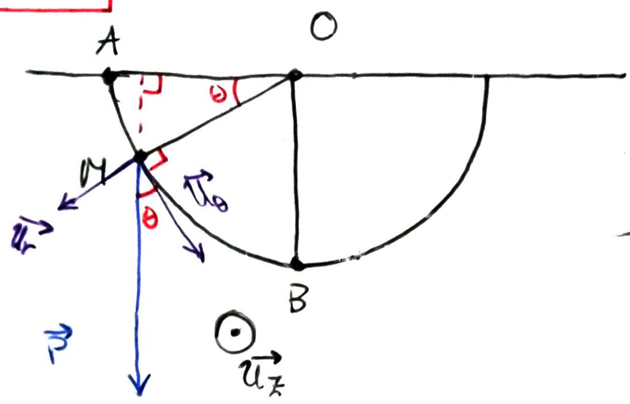
Une tige tourne dans le plan horizontal (xOy) autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante ω. Sur cette tige, un anneau M, quasi ponctuel peut coulisser sans frottement. A t=0 l'anneau est en M_0 ($OM_0 = a$) sans vitesse initiale.

1) A l'aide du TMC, déterminer deux équations.
2) Pour en déduire la trajectoire de l'anneau, que manque-t-il ?
3) Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau.



EXPMOCIN

$\boxed{1/1}$



S, R, F: $\vec{P} = mg\sin\theta\,\vec{u_r} + mg\cos\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec{R_n} = -R_n\vec{u_r}$

TMC: $\dot{\vec{L_o}}(M) = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}+\vec{R_n})$

$= \vec{OM} \wedge (mg\sin\theta\,\vec{u_r} + mg\cos\theta\,\vec{u_\theta} - R_n\vec{u_r})$

$= \vec{OM} \wedge mg\cos\theta\,\vec{u_\theta}$

$= r\vec{u_r} \wedge mg\cos\theta\,\vec{u_\theta}$

$\Leftrightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\ddot{\theta}\,\vec{u_z} = \cancel{m}\cancel{r}g\cos\theta\,\vec{u_z}$

On projette sur (Oz):

$r\ddot{\theta} = g\cos\theta$

$\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$= r\vec{u_r} \wedge mr\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$= mr^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$

$\boxed{1/2}$ $r\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta}\cos\theta$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}r\dot{\theta}^2 = g\sin\theta + \text{const}$

$t=0 \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{r}}$

$\Rightarrow v = \sqrt{2rg\sin\theta}$

TEC entre A et M

$$\Delta_{A \to M} E_c = W_{A\to M}(\vec{F}) = W_{A\to M}(\vec{P}) + W_{A\to M}(\vec{R_n})$$

$$= \frac{1}{2} m v_r^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = mgh \quad \text{avec } h = r \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} m v_M^2 = mgr \sin\theta \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow v_M = \sqrt{2gr\sin\theta}$$

$\boxed{1/3}$ Exprimez $\vec{R_n}$

D'après la seconde loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R_n} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow mg\sin\theta \vec{u_r} + mg\cos\theta \vec{u_\theta} - R_n \vec{u_r} = m\vec{a} \quad (*)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2 \vec{u_r}$$

Projection sur $\vec{u_r}$:

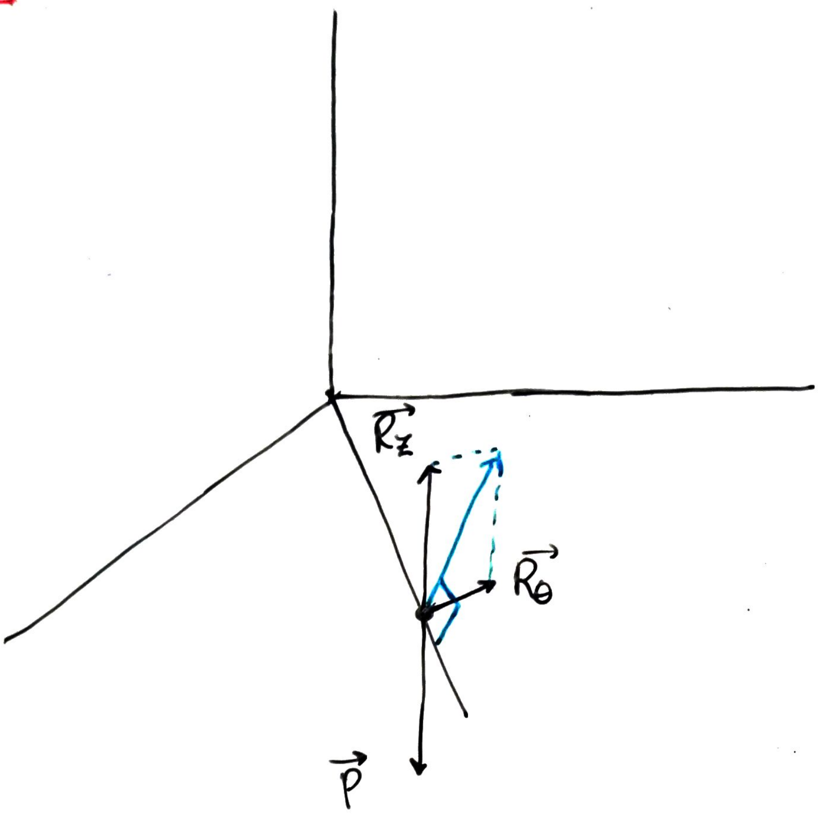
$$mg\sin\theta - R_n = -mr\dot{\theta}^2 \Leftrightarrow R_n = mg\sin\theta + mr\dot{\theta}^2$$

$$= mg\sin\theta + m\,2g\sin\theta \quad \text{d'après } (*)$$

$$= 3mg\sin\theta$$

d'où $\vec{R_n} = 3mg\sin\theta \vec{u_r}$

$\boxed{2}$



EXO MOCIN

$\boxed{2/1}$ Syst: $\{M\}$

Réf: Labo, galiléen

Forces:

- $\vec{P}$
- $\vec{R_n}$

$\vec{OM} = r\vec{u_r}$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{R_n}) = \vec{OM} \wedge \underbrace{\vec{R_n}}_{\vec{R_z}+\vec{R_\theta}}$ $R_z\vec{u_z}+R_\theta\vec{u_\theta}$

$= r\vec{u_r} \wedge \boxed{R_n}\vec{u_z}$

$= -\underbrace{rR_n\vec{u_\theta}}$ $R_\theta\vec{u_\theta} + R_z\vec{u_z}$

$\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$= r\vec{u_r} \wedge mr\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$= \underline{mr^2\dot{\theta}}\,\vec{u_z}$

constant

$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P}$

$= r\vec{u_r} \wedge (-mg\vec{u_z})$

$= mgr\vec{u_\theta}$

$\dot{\vec{L_O}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta}\vec{u_z}$

TMC: $\dot{\vec{L_O}} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) \Rightarrow \begin{cases} /\vec{u_\theta} & 0 = mgr - rR_n \Rightarrow R_n = mg \\ /\vec{u_z} & 2\cancel{m}r\cancel{\dot{r}}\cancel{\dot{\theta}} = \cancel{0 \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{const}} \end{cases}$

$\boxed{\text{imp}}$

$2mr\dot{r}\dot{\theta} = rR_\theta$

$\Leftrightarrow R_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta}$

rappel pourquoi imp?

$\vec{R_t} = \vec{0} \Leftrightarrow$ sans frottements

$\Leftrightarrow$ réac. que normale

$\Leftrightarrow$ réac $\perp$ déplacement

mais il y a aussi: $\vec{R_\theta}$ comme composante de $\vec{R_n}$!!

$\boxed{2/2+3}$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

2ᵉ loi de Newton:

$$m\vec{a} = \vec{R_z} + \vec{R_\theta} + \vec{P}$$

$$\begin{cases} /\vec{u_r} & m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0 \\ /\vec{u_z} & 0 = R_\theta \\ /\vec{u_\theta} & 2m\dot{r}\underbrace{\omega}_{\dot{\theta}} = R_z - mg \end{cases}$$

L'équation différentielle devient:

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0$$

EC : $x^2 - \omega^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \omega^2$

$\Leftrightarrow x = \pm\omega$

Les solutions sont de la forme:

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

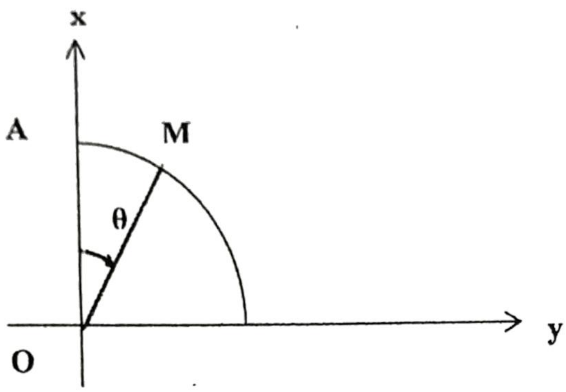
CI $\quad v(0) = 0 \Leftrightarrow A\omega - B\omega = 0 \Leftrightarrow A = B$

$\quad r(0) = a \Leftrightarrow A + B = a \Leftrightarrow A = B = \frac{a}{2}$

$$r(t) = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \cdot ch(\omega t)$$

magnifique.

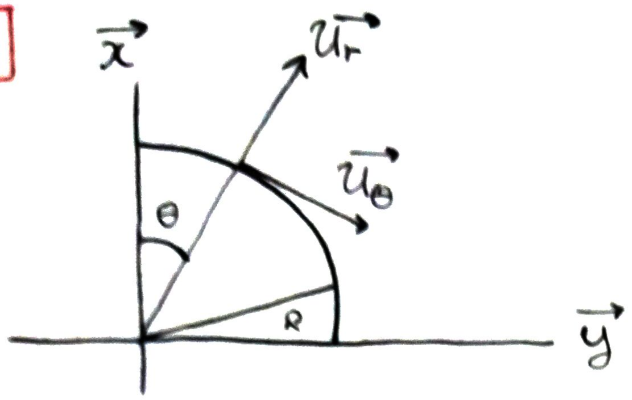
Exercice 3 :



M est une bille ponctuelle qui glisse sans frottement sur une sphère de rayon R. Elle est lâchée en A(R,0,0) sans vitesse initiale.

1) Etablir avec le TMC, l'équation du mouvement.
2) En déduire R_n, réaction normale et l'angle pour lequel la bille quitte la sphère.

$\boxed{3}$



Système : $\{M\}$

Référentiel : Galiléen

Forces : $\vec{P}$, $\vec{R_n}$

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = R\vec{u_r} \wedge mg\,($$
$$= Rmg\sin\theta\,\vec{u_z}$$

$$\vec{OM} = R\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$
$$= R^2 m\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

$$\dot{\vec{L_o}} = R^2 m\ddot{\theta}u_z = Rmg\sin\theta\,\vec{u_z}$$

On projette :

$$R^2 m\ddot{\theta} = Rmg\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow R\ddot{\theta} = g\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}R\ddot{\theta} = \dot{\theta}g\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}R\dot{\theta}^2 = -g\cos\theta + \text{const} \quad ; \quad \text{CI} : \begin{array}{l}\dot{\theta} = 0\\ \theta = 0\end{array} \Rightarrow \text{const} = g$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R}\cos\theta + \frac{2g}{R}$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{-\frac{2g}{R}\cos\theta + \frac{2g}{R}}$$
$$\Leftrightarrow v = R\dot{\theta} = \sqrt{-2gR\cos\theta + 2Rg}$$
$$= \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

TEC

$$\Delta_{A\to M} E_c = W_{A\to M}(\vec{P}) + W_{A\to M}(\vec{R_n})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_M^2 - \cancel{\frac{1}{2}mv_A^2} = mg(x_A - x_M) = +mgh = +mg(R - R\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

$\boxed{3/2}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_n} \qquad \vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

$$\Leftrightarrow mR\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - mR\dot{\theta}^2\vec{u_r} = mg\sin\theta\,\vec{u_\theta} - mg\cos\theta\,\vec{u_r} + R_n\vec{u_r}$$

$$/\vec{u_r}\left\{ -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_n \Rightarrow R_n = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \right.$$

$$/\vec{u_\theta}\left\{ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \right.$$

D'où $R_n = -m2g(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$

$= 3mg\cos\theta - 2mg$

La bille quitte la sphère quand $R_n = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \theta = \operatorname{acos}\frac{2}{3}$