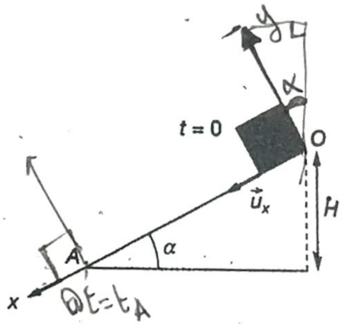
EX P DYN

Mécanique

TD 2 Dynamique du point en Référentiel Galiléen

Exercice 1 :

Un solide supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné d'angle α sans vitesse initiale. On note H la distance de ce point initial au plan horizontal.



CAH SOH

$\sin \alpha = \frac{H}{x(t_A)}$

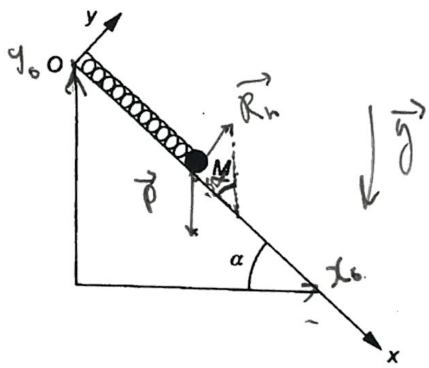
$\Leftrightarrow x(t_A) =$

1) Déterminer l'accélération du mobile à l'instant t lorsque les frottements sont négligés. En déduire la vitesse v en A.
2) On ne néglige plus les frottements. Quelle est la condition sur le coefficient de frottement f pour que le solide commence à glisser à t=0. Reprendre alors les questions du 1).

Exercice 2 :

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_o, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O d'un plan incliné et à un point matériel M de masse m.

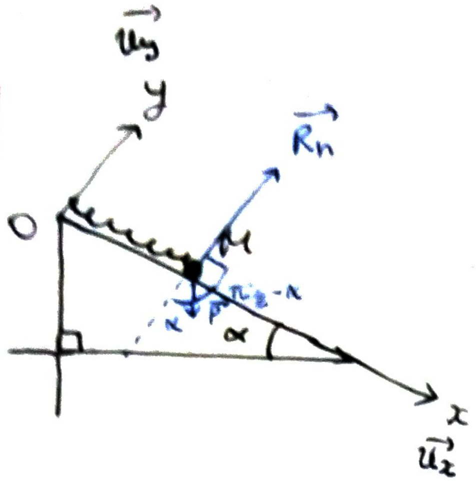
On pose : $\overline{OM} = x$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.



1) Déterminer la position à l'équilibre du point M, notée x_e.
2) A partir de cette position d'équilibre, M est écarté d'une longueur D et laché sans vitesse initiale. Déterminer x(t).

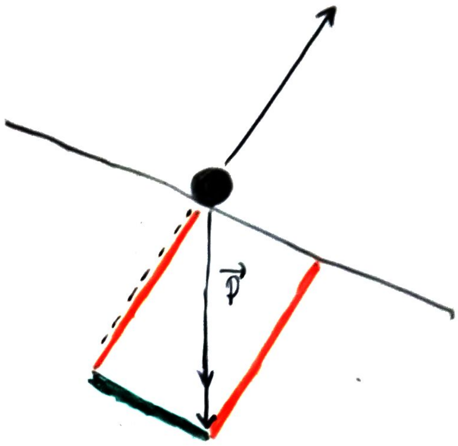
EXP DYN

$\boxed{2/1}$



Syst: {M}
Réf: Labo, Galiléen
Forces:

- $\vec{P}$
- $\vec{R_n}$
- $\vec{F}$



$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R_n} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} /\vec{u_x} & +mg\sin\alpha - k(x_e - l_0) = 0 \\ /\vec{u_y} & -mg\cos\alpha + R_n = 0 \end{cases}$$

$$mg\sin\alpha = kx_e - kl_0$$

$$\Leftrightarrow x_e = \frac{mg\sin\alpha + kl_0}{k}$$

$\boxed{2/2}$ Hors équilibre:

$$\vec{P} + \vec{R_n} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} /\vec{u_x} & mg\sin\alpha - k(x(t) - l_0) = m\ddot{x} \\ /\vec{u_y} & -mg\cos\alpha + R_n = m\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{mg\sin\alpha} - k(x(t) - x_e + \underline{x_e - l_0}) = m\ddot{x}$$

$\Leftrightarrow m\ddot{x} = kx_e - kx(t)$

$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx(t) = kx_e$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_e$

$\omega_0^2 := \frac{k}{m}$ $rad\,s^{-1}$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$

Les solutions sont:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_e$

CI

$x(0) = A + x_e = x_e + D$

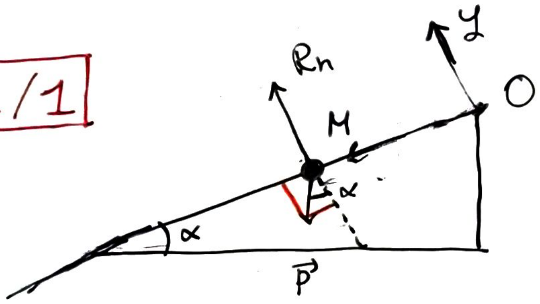
$\Leftrightarrow A = D$

$\dot{x}(0) = 0 = \omega_0 B$

$\Leftrightarrow B = 0$

$x(t) = D\cos(\omega_0 t) + x_e$

$\boxed{1/1}$



Sys: {M}

Réf: ...

Forces:

- $\vec{P}$
- $\vec{R_n}$

2e loi N:

$\vec{P} + \vec{R_n} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} /Ox & m\ddot{x} = mg\sin\alpha \\ /Oy & m\ddot{y} = 0 = -mg\cos\alpha + R_n \end{cases}$$

$\ddot{x} = g\sin\alpha$ ($=$ const $\Rightarrow$ MRUV)

$\dot{x} = g\sin\alpha\, t + \text{const}$

$\dot{x}(0) = 0 = \text{const}$

$\Rightarrow \forall t \quad \dot{x} = g\sin\alpha\, t$

$x = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2 + \text{const}$

$x(0) = 0 = \text{const}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2$

On cherche t_A tel que M passe par A.

$x(t_A) = \overline{OA}$

On a $\sin\alpha = \frac{H}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{H}{\sin\alpha}$

$x(t_A) = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} g t_A^2 \sin\alpha$

$\Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2H}{g\sin^2\alpha}}$

$\Rightarrow v(t_A) = g\sin\alpha\, t_A = \sqrt{2gH}$

Meth 2 Avec le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c{}_{O\to A} = W_{O\to A}(\vec{P}) + \cancel{W_{O\to A}(\vec{R_n})}$$ car $\vec{R_n} \perp$ déplacement

$$\Leftrightarrow Ec_A - \cancel{Ec_0} = W_{A\to B}(\vec{P})$$

à l'origine

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{A\to B}(\vec{P}) = + mgH$$

$$\Leftrightarrow v_A = \sqrt{2gH}$$

$\boxed{2/2}$ Sys : ...

Ref : ...

Forces :

- $\vec{P}$
- $\vec{R_n}$
- $\vec{R_t}$

2ᵉ loi de N : $\vec{P} + \vec{R_n} + \vec{R_t} = m\vec{a}$

$$\begin{aligned} /Ox & \left\{ m\ddot{x} = mg\sin\alpha - Rt \right. \\ /Oy & \left| m\ddot{y} = 0 = -mg\cos\alpha + R_n \right. \end{aligned}$$

Glissement dès que $\ddot{x} > 0$

$$\Leftrightarrow mg\sin\alpha > R_t$$

Or : $\frac{Rt}{R_n} = f \Leftrightarrow R_t = f \cdot R_n$

$$= f mg\cos\alpha$$

$$\cancel{mg}\sin\alpha > f \cancel{mg}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha > f$$

On a : $\ddot{x} = g\sin\alpha - f g\cos\alpha := a$

$\ddot{x} = a = \text{const}$

$\dot{x} = at + \cancel{\text{const}}$

$x = \frac{1}{2}at^2 + \cancel{\text{const}}$

$$t_A \,/\, x(t_A) = \overline{OA} = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} a t_A^2$$

$$\Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2H}{a\sin\alpha}}$$

$$v_A = a t_A = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)\sqrt{\frac{2H}{(g\sin\alpha - fg\cos\alpha)\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2H(g\sin\alpha - fg\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{2gH(1 - f\cot\alpha)}$$

$$\underset{O\to A}{\Delta E_c} = \underset{O\to A}{W}(\vec{P}) + \underset{O\to A}{W}(\vec{R_n}) + W(\vec{R_T})$$

$(\vec{R_n} \perp \text{dépl.})$ car $\vec{R_T}$ supp. const

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = + mgH + 0 + \underbrace{\int_O^A \vec{R_T} \cdot d\vec{\ell}}_{= \vec{R_T} \cdot \overrightarrow{OA}}$$

$$= -R_T \frac{H}{\sin\alpha} \; ; \; R_T = f R_0 = f mg\cos\alpha$$

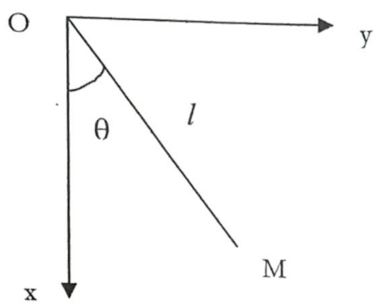
$$\frac{1}{2} m v_A^2 = mgH - f\, mgH \,\mathrm{cotan}\,\alpha$$

$$v_A = \sqrt{2gH(1 - f\,\mathrm{cotan}\,\alpha)}$$

Exercice 3 :

Un pendule simple (point matériel M de masse m accroché à un fil de longueur l à un point fixe O) est en mouvement dans un plan vertical d'un référentiel Terrestre supposé Galiléen.

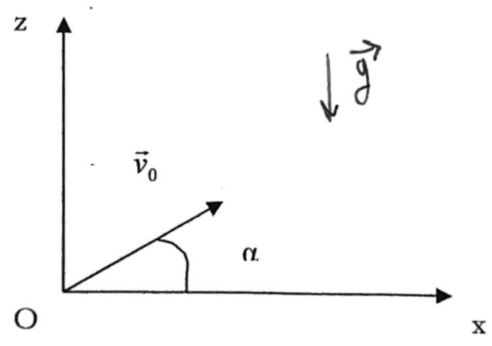
1) Exprimer les vecteurs vitesse et accélération $\vec{v}$ et $\vec{a}$ du point M dans le référentiel Terrestre.
2) En déduire
   a) l'expression de la tension T du fil
   b) l'équation différentielle en θ si les angles sont petits.
   c) résoudre cette équation si à t=0, on a $\theta=\theta_0$ et le pendule laché sans vitesse initiale.
3) Exprimer T uniquement en fonction de θ. A quelle condition sur θ le fil reste t-il tendu?



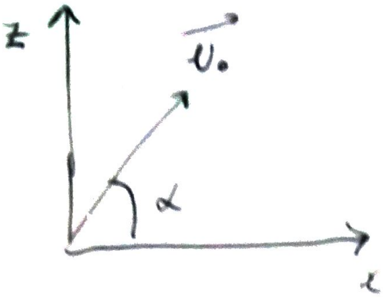
Exercice 4 :

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m est mise à feu à la surface de la Terre, avec une vitesse v_0 sous un angle α avec l'horizontale depuis l'origine O.

1) Trouver l'équation de la trajectoire dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme ($g=10m/s^2$)
2) Exprimer la portée (abscisse à laquelle la fusée touche le sol) et la flèche (altitude maximale atteinte) en fonction de v_0 , α et g. ~~(v_0 = 1km/s)~~
3) La vitesse étant fixée à v_0 = 1km/s, comment choisir l'angle de tir α pour que la trajectoire passe par un point A (x_A,z_A). x_A=73,2km et z_A=19,6km. temps ??
4) On tient compte de la résistance de l'air, opposée à la vitesse de la fusée : $\vec{f}=-k.m.\vec{v}$ avec k : cste positive.
   Trouver les équations paramétriques x(t) et z(t) du mouvement de M.



EX $\underline{\text{n}^\circ}$ DYN
$\underline{|4/1|}$



M, R_g, $\vec{P}$

2ᵉ loi N

$$\cancel{m}\vec{a} = \cancel{m}\vec{g}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C \\ \dot{y} = C \\ \dot{z} = -gt + C \end{cases}$$

CI $\dot{x}(0) = C = v_0 \cos\alpha$
$\dot{y}(0) = C = 0$
$\dot{z}(0) = 0 + C = v_0 \sin\alpha$

$$\forall t \quad \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

$x(t) = v_0 \cos\alpha t + C$
$y(t) = C$
$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + C$

CI $x(0) = C = 0$
$y(0) = C = 0$
$z \quad = C = 0$

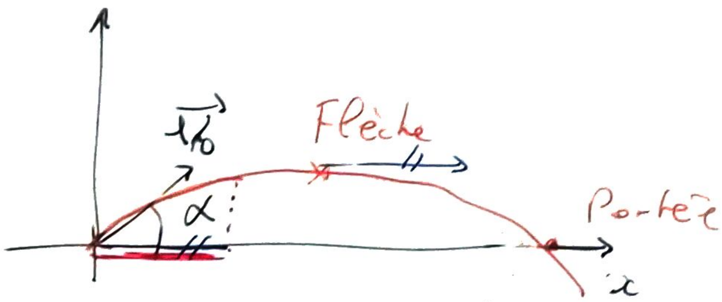
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

$y(t) = 0 \longrightarrow$ mvt plan dans (xOz)

Eq de la traj

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\, x$$

$\boxed{4/2}$



$$P : \; z_P = 0 = -\frac{1}{2} g \frac{x_P^{\cancel{2}}}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\, \cancel{x_P} = 0$$

$$x_P = \frac{2 \tan\alpha \cos^2\alpha\, v_0^2}{g}$$

$$\boxed{x_P = \frac{\sin(2\alpha)\, v_0^2}{g}}$$

$$F : \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_F = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{z}(t) = 0$$

$$t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$z(t_F) = -\frac{1}{2} g t_F^2 + v_0 \sin\alpha\, t_F = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

4.3

$$A \in \text{traj} \iff -\frac{1}{2} g \frac{x_A^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha \, x_A = z_A$$

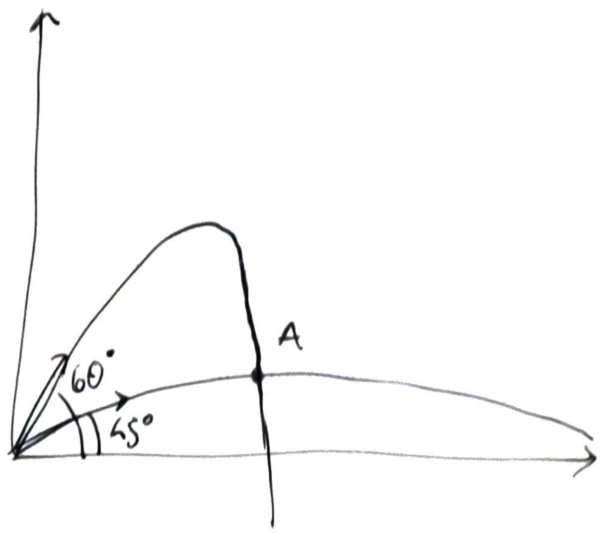
$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \quad \iff -\frac{1}{2} g \frac{x_A^2}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha) + \tan\alpha \, x_A - z_A = 0$$

$$\iff \underbrace{-\frac{g x_A^2}{2 v_0^2}}_{-2{,}6\cdot 10^4} \tan^2\alpha + \underbrace{x_A}_{73{,}2\cdot 10^3} \tan\alpha - \underbrace{\left(z_A + \frac{g x_A^2}{2 v_0^2}\right)}_{-4{,}5\cdot 10^4} = 0$$

Δ : ——

$\tan\alpha =$ → $1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$\tan\alpha =$ → $1{,}7 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$



EXE DYN

$\boxed{4/4}$ Syst : $\{M\}$

Ref : Labo Galil.

Forces :

- $\vec{P}$
- $\vec{f}$

D'après la loi Newton :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{m}\vec{g} - k\cancel{m}\vec{v} = \cancel{m}\vec{a}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 - k v_x \\ \dot{v}_y = 0 - k v_y \\ \dot{v}_z = -g - k v_z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x + k v_x = 0 \\ \dot{v}_y + k v_{y} = 0 \\ \dot{v}_z + k v_z = -g \end{cases}$$

Solutions :

$$\begin{cases} v_x = A e^{-k \cdot \mathrm{id}} \\ v_y = A e^{-k \cdot \mathrm{id}} \\ v_z = C e^{-k \cdot \mathrm{id}} - \frac{g}{k} \end{cases}$$

@ $t = 0$

$$\begin{cases} v_x(0) = \cos\alpha\, v_0 = A \\ v_y(0) = 0 = B \\ v_z(0) = \sin\alpha\, v_0 = C - \frac{g}{k} \end{cases}$$

$$\forall t \quad \begin{cases} v_x(t) = \cos\alpha\, v_0 e^{-kt} \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = \left(\sin\alpha\, v_0 + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases}$$