Dynamique en référentiel Galiléen

On a vu dans le chapitre précédent la cinématique (paramétrage du mouvement). On relie ici le mouvement à ses causes

I Notion de point matériel

def

Objet de taille suffisamment petite pour être assimilé à un point.

On ne tient pas compte de sa masse volumique ρ et du volume V mais on donnera sa masse ($m = \rho V$)

⚠ La masse est en kg

II Forces

Une action mécanique sur un point matériel peut le mettre en mouvement, l'accélérer, ...
bref de modifier son vecteur vitesse.

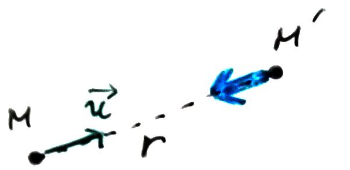
On représente une action mécanique par un vecteur force:

$\vec{F}$ de norme $\|\vec{F}\|$ en N $\qquad N = kg\, m\, s^{-2}$

On distingue les interactions:

- à distance
- de contact

1 Forces gravitationnelles



M exerce sur M' la force gravitationelle attractive:

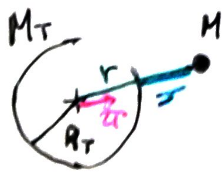
$$\boxed{\vec{F}_{M\to M'} = -G\frac{m\,m'}{r^2}\vec{u}}$$

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N m^2 kg^{-2}$ "const universelle de gravitation"

M' exerce sur M la force:

$$\vec{F}_{M'\to M} = -G\frac{m\,m'}{r^2}\vec{u} = -\vec{F}_{M'\to M}$$

Si l'un des deux objets est la terre:



$$\vec{F}_{T\to M} = -G\frac{m M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{F}_{T\to M} = m\overrightarrow{g} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{g} := -G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u} \quad \text{“champ de pesanteur”}$$

remq

M au sol $\Leftrightarrow$ M sur Terre

$\Leftrightarrow h = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{F}_{T\to M} =: \overrightarrow{P}$ “poids de M”

$$\overrightarrow{P} = G\frac{M_T m}{R_T^2}\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{g_0}$$

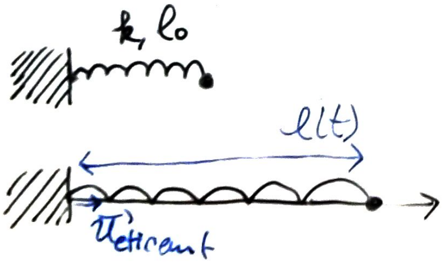
où : $\overrightarrow{g_0} = -\frac{GM_T}{R_T^2}\overrightarrow{u}$ “champ de pesanteur”

app

$$\|\overrightarrow{g_0}\| = \frac{GM_T}{R_T^2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} G = 6.67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N m^2 kg^{-2}} \\ M_T = 6\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \\ R_T = 6\,400\ \mathrm{km} \end{cases}$$

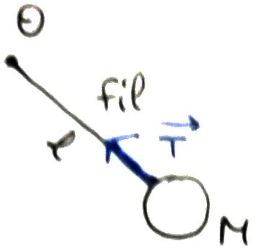
$$= 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

2 Force de rappel d'un ressort



$$\boxed{\overrightarrow{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_{\text{étirement}}}}$$

3 Tension d'un fil



Le fil exerce sur M une force appelée **tension**

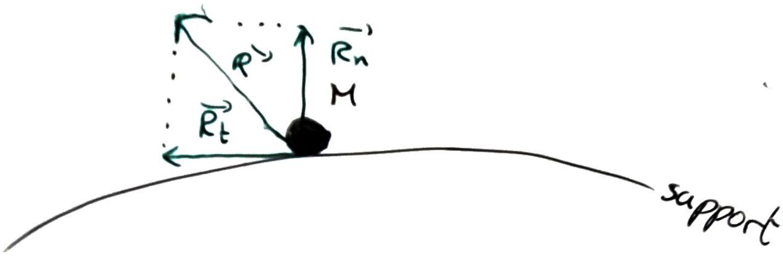
Elle n'existe que si le fil est tendu

Il n'existe aucune formule qui la caractérise.

4 Force de frottements solides

def

Force entre 2 objets solides.



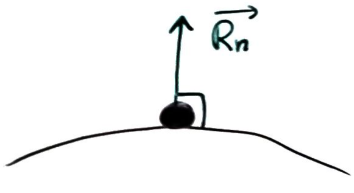
Réaction force exercée par le support sur M : $\vec R$

$$\vec R = \vec{R_t} \text{ "tangentielle"} + \vec{R_n} \text{ "normale"}$$

2 cas :

- pas de frottements solides

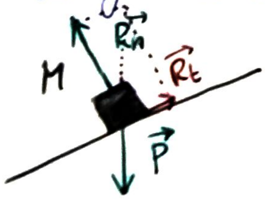
  $\vec{R_t} = \vec 0 \Leftrightarrow \vec R = \vec{R_n}$



- else

  $\vec{R_t} \neq \vec 0$

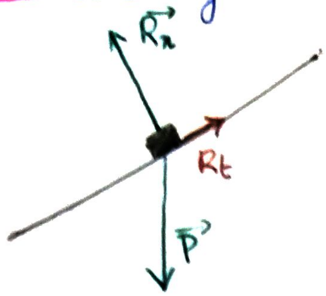
  – pas de glissement (M est imobile)



$$\vec{R_n} + \vec{R_t} + \vec P = \vec 0$$

$$\boxed{\frac{R_t}{R_n} < f}$$

— avec glissement



$$\vec{R_n} + \underbrace{\vec{R_t}}_{\text{opposé au déplacement}} + \vec{P} \neq \vec{0}$$

sens $\vec{R_t}$ = − sens $\vec{v}$

$$\boxed{R_t / R_n = f}$$ "coefficient de frottement"

remq

⚠ Parfois on note $\vec{f} = \vec{R_t}$. À ne pas confondre avec f

remq Loi phénoménologique

f dépend des matériaux, de la nature des supports, ...

ses valeurs sont répertoriées pour chaque matériaux

5 Force de frottements fluides

Lorsque M se déplace dans un fluide :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

Il existe aussi des domaines où on a $\vec{f} = -\alpha v^2 \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$

remq Loi phénoménologique

λ dépend
- du fluide
- de la surface de contact

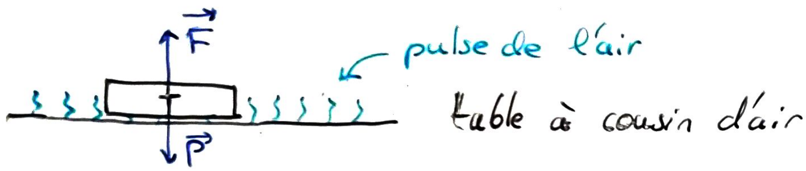
III Lois de Newton

0 Point mécaniquement isolé

<u>def</u> Particule isolée

Particule soumise à aucune force ou soumise à des forces se compensant (pseudo-isolée)

<u>remq</u> en pratique



$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$ $\Rightarrow$ l'objet est pseudo-isolé

1ère loi de Newton principe d'inertie

<u>postulat</u> Il existe des référentiels dits "Galiléens" dans lesquels une particule pseudo-isolée ou isolée a un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Si la particule est initialement au repos, elle demeure dans cet état de repos

Le référentiel du laboratoire (ou terrestre) est (dans certaines conditions) Galiléen.

Lorsqu'on connaît un référentiel Galiléen, tout réf. en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-ci est alors Galiléen.

ex

Supp réf. labo Galiléen.

Une voiture sur le boulevard à vitesse constante constitue un réf. Galiléen.

Le feu passe au rouge. La voiture ~~grille le feu~~ freine, le réf. n'est plus Galiléen.

Alors, de nouvelles forces dites "forces d'inertie"

Au freinage, le cartable sur le siège va vers l'avant, sous la force d'inertie

Autre exemple: l'ascenseur

Autre exemple: virage en {voiture, vélo, moto}.

en virage à gauche, le corps du cycliste subit une force d'inertie qui le pousse à droite. Pour la compenser il penche vers la gauche

. existe quand le réf. n'est pas Galiléen.

2^e loi de Newton PFD ou RFD

Soit un point M de masse m soumis à une résultante de force $\vec{F}$, étudiée dans un réf. Galiléen.

On a :

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$$

remq Avec $\dot{m} \neq 0$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{p}} = m\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

remq M est TRU

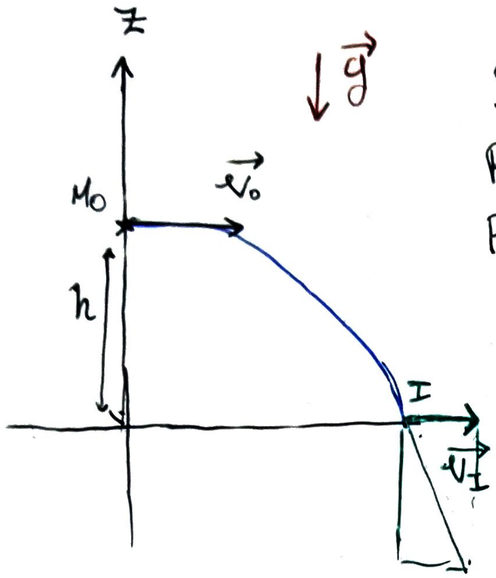
$$\vec{v} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

3^e loi de Newton principe des actions réciproques

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

IV Exemples de mouvements

1 Mv dans un champ de pesanteur



Syst: $\{M\}$

Réf: Labo, Galiléen

Forces:

- poids $\vec{P}$
- frottements négligés

2^e loi de Newton:

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Meth 1

On projette :

$$\begin{cases} a_x = 0 = \dot{v}_x \\ a_y = 0 = \dot{v}_y \\ a_z = -g = \dot{v}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \text{const} \\ v_y = \text{const} \\ v_z = -gt + \text{const} \end{cases}$$

Conditions initiales

$$\begin{cases} v_x(0) = \text{const} \\ v_y(0) = \text{const} \\ v_z(0) = 0 + \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \\ v_z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\forall t \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 = \dot{x} \\ v_y(t) = 0 = \dot{y} \\ v_z(t) = -gt = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + \text{const} \\ y(t) = \text{const} \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \end{cases}$$

Conditions initiales:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = h \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

équations $\begin{cases} \text{horaires} \\ \text{paramétriques} \end{cases}$

- $\forall t,\ y = 0$: Mv plan
- $t = \dfrac{x}{v_0}$ que l'on injecte dans z : $\boxed{z(x) = h = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}}$

équation cartésienne de la trajectoire

Cherchons $\vec{v_I}$ et $\|\vec{v_I}\|$ au niveau du point d'impact.

$$t_I \ /\ z(t_I) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t_I^2 + h = 0$$

$$\Leftrightarrow t_I = \sqrt{\frac{h}{\frac{1}{2} g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\vec{v_I} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ -g t_I = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v_I}\| = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Meth 2

$$\vec{a} = \vec{g} = \ddot{\overrightarrow{OM}} \Rightarrow \vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{g} \cdot t + \overrightarrow{const}$$

C.I. @ $t = 0$ $\quad \vec{v} = \overrightarrow{const} = \vec{v_0}$

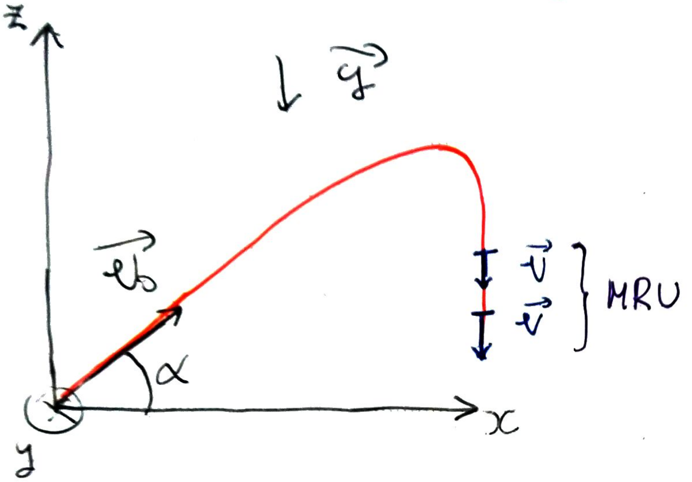
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v_0} \cdot t + \overrightarrow{const}$$

CI @ $t=0$ $\quad \overrightarrow{OM_0} = \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{const}$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v_0}\,t + \overrightarrow{OM_0}}$$

remq Si on projette sur les trois axes, on retrouve les équations paramétriques

2 Mouvement avec force de frottements fluides



On lance un missile $M(m)$ depuis la corée du Nord

On suppose qu'il existe $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$

Syst : $\{M\}$; Réf. : Terrestre Galiléen ; Forces : $\vec{P}$, $\vec{f}$

2ème loi de Newton

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$$

On projette :

$$\begin{cases} m\,\dot{v}_x = 0 - \lambda v_x \\ m\,\dot{v}_y = 0 - \lambda v_y \\ m\,\dot{v}_z = -mg - \lambda v_z \end{cases}$$

On pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$

$$\begin{cases} \dot{v}_x + \frac{1}{\tau} v_x = 0 \\ \dot{v}_y + \frac{1}{\tau} v_y = 0 \\ \dot{v}_z + \frac{1}{\tau} v_z = -g \end{cases}$$

Les solutions :

$$\begin{cases} v_x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_y(t) = B e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_z(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \end{cases}$$

<u>CI</u>

$$\begin{cases} v_x(0) = A = v_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = B = 0 \\ v_z(0) = C - g\tau = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

On a :

$$\forall t, \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -g\tau + (g\tau + v_0 \sin\alpha) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

or $\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$

On a

$$\begin{cases} x(t) = -\tau v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{t}{\tau}} + A \\ y(t) = B \\ z(t) = -g\tau t - \tau (g\tau + v_0 \sin\alpha) e^{-\frac{t}{\tau}} + C \end{cases}$$

CI

$$\begin{cases} x(0) = -\tau v_0 \cos\alpha + A = 0 \\ y(0) = B = 0 \\ z(0) = -\tau(g\tau + v_0 \sin\alpha) + C = 0 \end{cases}$$

On a

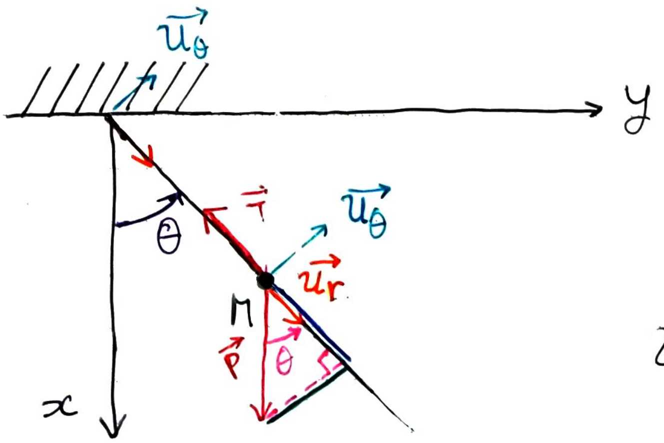
$$\begin{cases} x(t) = \tau v_0 \cos\alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -g\tau t + \tau(g\tau + v_0 \sin\alpha)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{cases}$$

remq

$$\vec{v} \xrightarrow[\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\tau \end{pmatrix} = -g\tau \, \vec{u_z}$$

qq τ

3 Le pendule



Syst : $\{M\}$

Ref. : labo

Forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$

2e loi de N :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Projection en coord polaires

$$\left(\cos\theta = \frac{\quad}{mg} \qquad \sin\theta = \frac{\quad}{mg} \right)$$

$$\vec{T} = -T\vec{u_r}$$

où $T = \|\vec{T}\|$

$$\vec{P} = +mg\cos\theta \, \vec{u_r} - mg\sin\theta \, \vec{u_\theta}$$

$$\vec{OM} = l\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

$$/\vec{u}_r \quad \begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (2) \end{cases}$$

$/\vec{u}_\theta$

remq (2)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

remq Approximation des petits angles

θ petit $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

oscillateur harmonique

$\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$