Cinématique

NO GOD PLEASE NO. NO! NOOOOOOO

l'étude du mouvement et de sa description

I Repère d'espace - Référentiel

1 Repère d'espace

def solide

Système pour lequelle la distance entre deux points est constante par rapport au temps

Un repère d'espace est lié à un solide si son orig et ses axes sont fixes au cours du temps

L'ensemble des systèmes de coords liés à un solide constitue un repère d'espace

2 Référentiel

def Référentiel

Repère d'espace associé à un repère de temps

def Repère temporel

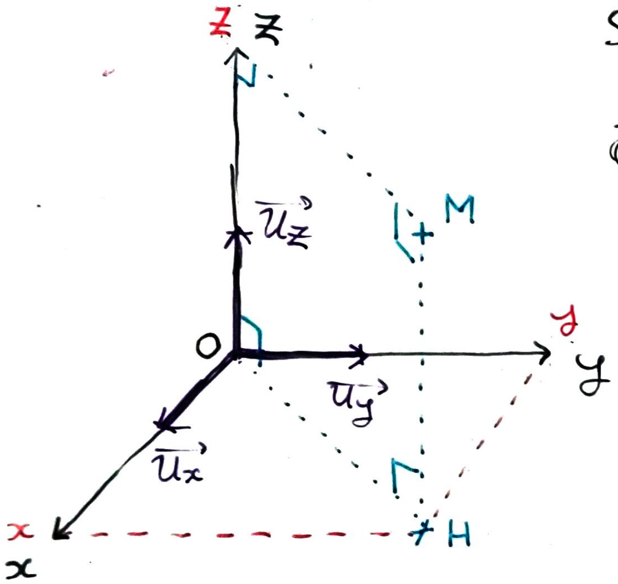
Il faut une origine (de temps) et une unite

II Système de coordonnées

remq

Toutes les bases sont orthonormées directes

1 Coord cartésiennes

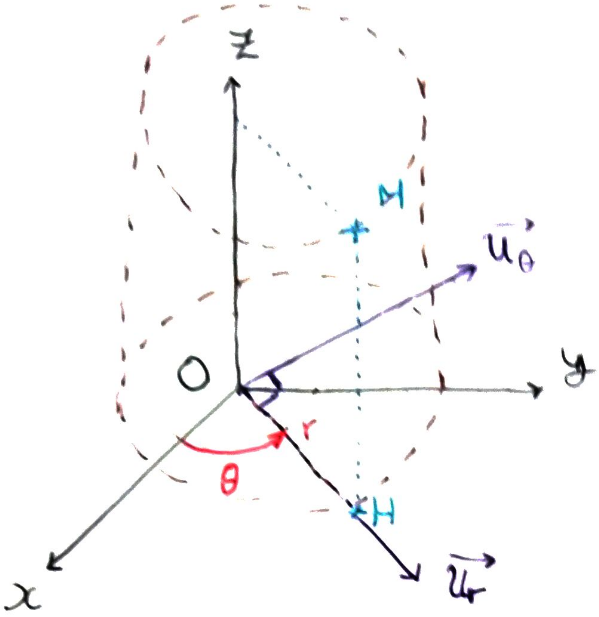


Soit $M = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$
$$= \underbrace{x\vec{u_x} + y\vec{u_y}}_{\overrightarrow{OH}} + \underbrace{z\vec{u_z}}_{\overrightarrow{HM}}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

2 Coord. cylindriques



On pose $\begin{cases} r := \|\vec{OH}\| > 0 \\ \theta := (Ox, \vec{OH}) \end{cases}$

On a

$$M = (r, \theta, z)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OH} + \vec{HM} \\ &= r\vec{u_r} + 0\,\vec{u_\theta} + z\,\vec{u_z} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

def Vecteur unitaire radial $\vec{u_r}$

$$\vec{u_r} = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$$

⚠ Le θ n'intervient pas ds. $\vec{OM}$ car il est "dans $\vec{u_r}$".

$M = \begin{pmatrix} r \\ \boxed{\theta} \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{OM}\begin{pmatrix} r \\ \boxed{0} \\ z \end{pmatrix}$

def Vecteur unitaire orthoradial $\vec{u_\theta}$

$\vec{u_\theta}$ / $\begin{cases} \vec{u_r} \perp \vec{u_\theta} \\ \vec{u_\theta} \text{ dans } xOy \\ \vec{u_\theta} \text{ orienté dans sens de } \theta \end{cases}$

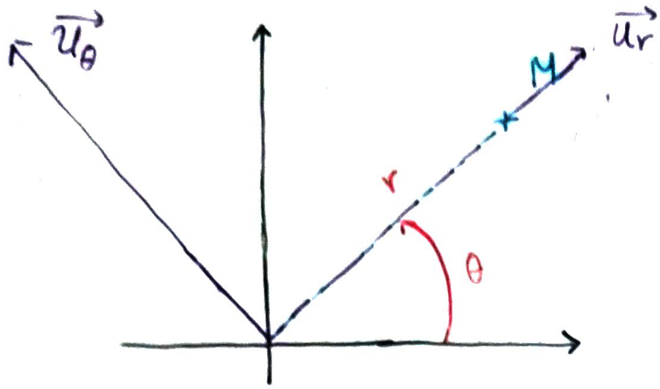
def

$\vec{u_z}$ / $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ est une base directe.

3 Coordonnées polaires

def

Cas particulier des coords cylindriques avec $\vec{u_z} = \vec{0}$.
(dans le cas d'un mouvement plan)

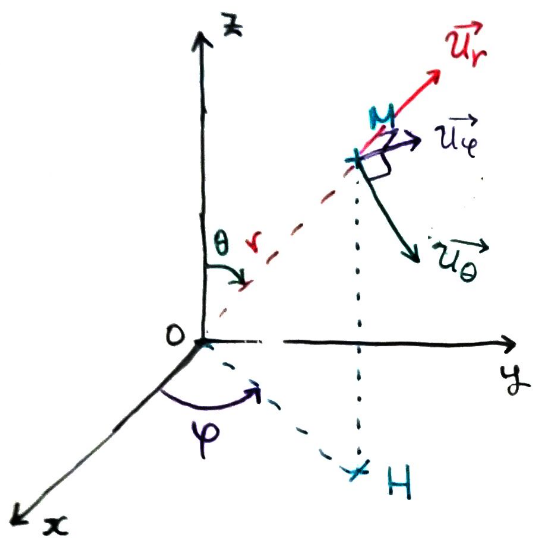


$M = (r, \theta)$

$\vec{OM} = r\vec{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$

base: $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$

3 Coord sphériques

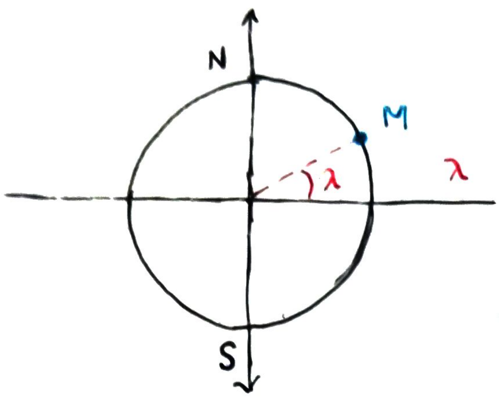


$$\begin{cases} r := \|\vec{OM}\| \\ \theta := (Oz, \vec{OM}) \\ \varphi := (Ox, \vec{OH}) \end{cases}$$

$$\boxed{M = (r, \theta, \varphi)}$$

$$\begin{cases} \vec{u_r} := \dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} \\ \vec{u_\theta} \ / \begin{cases} \in (MOz) \\ \perp \vec{u_r} \\ \text{orienté ds sens } \theta \end{cases} \\ \vec{u_\varphi} \ / \ (\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi}) \text{ est une b.o.n.d} \end{cases}$$

Cas particulier sur Terre



λ latitude: $\frac{\pi}{2} - \theta$

longitutde: méridien de Greenwich
origine: $\vec{u_\varphi}$

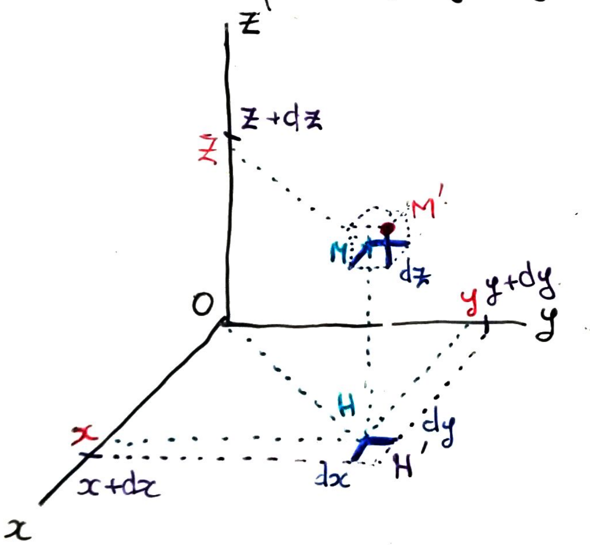
4 Vecteur déplacement élémentaire

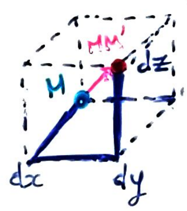
def

Lorsque $M=(x,y,z)$ à une date t
se déplace de manière $\begin{cases} \text{élémentaire} \\ \text{ou} \\ \text{infinitésimal} \end{cases}$ (pendant la durée dt)

ses coordonnées varient:

$$M' = (x+dx,\ y+dy,\ z+dz) \quad \begin{cases} dx, dy, dz \in \mathbb{R} \\ dx \neq dy \neq dz \end{cases}$$





def Vecteur déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{MM'} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

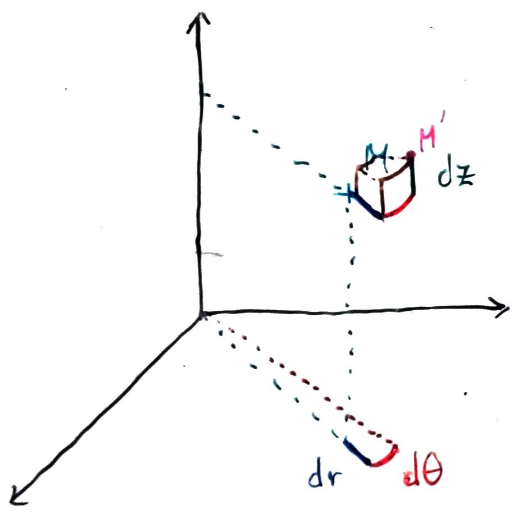
$$= \left((x+dx)\overrightarrow{u_x} + (y+dy)\overrightarrow{u_y} + (z+dz)\overrightarrow{u_z}\right) - (x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z})$$

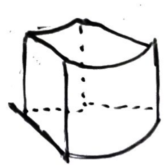
$$=: d\overrightarrow{OM}$$

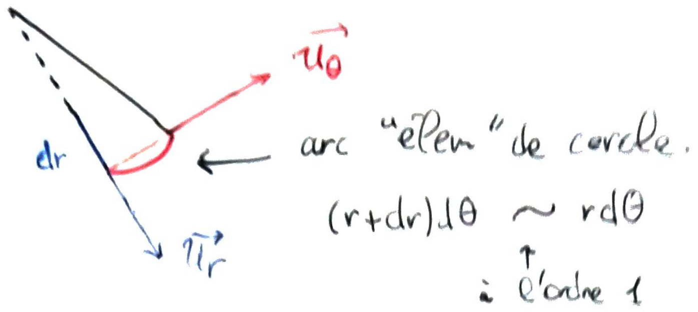
$$=: d\vec{\ell}$$

En coord. cylindriques

$$M = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \text{ à } t \qquad \text{et} \qquad M' = \begin{pmatrix} r+dr \\ \theta + d\theta \\ z + dz \end{pmatrix} \text{ à } t + dt$$







d'où

$$\overrightarrow{MM'} = dr\,\vec{u_r} + d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}$$

III Vecteur vitesse-accélération

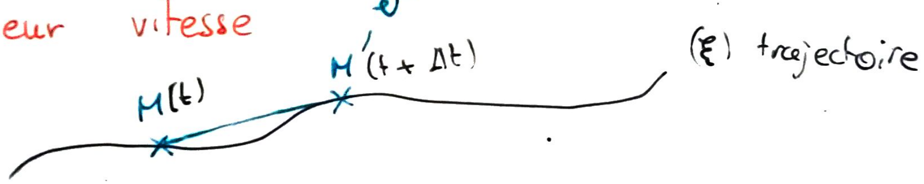
1 Trajectoire d'un point M

déf

Ensemble des positions occupées par le point M au cours du temps.

La trajectoire dépend du référentiel

2 Vecteur vitesse



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

On a $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{MM'}$

$\vec{v}$ est tangeant à la trajectoire

3 Expressions

a En coord cartésiennes

$$d\vec{OM} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} di \vec{u_i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \frac{di}{dt} \vec{u_i}$$

$$= \sum_{i \in \{x,y,z\}} \dot{i} \vec{u_i}$$

$$= \dot{x} \vec{u_x} + \dot{y} \vec{u_y} + \dot{z} \vec{u_z}$$

Meth 2

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x} \vec{u_x} + x \cancel{\frac{d\vec{u_x}}{dt}} + \dot{y} \vec{u_y} + y \cancel{\frac{d\vec{u_y}}{dt}} + \dot{z} \vec{u_z} + z \cancel{\frac{d\vec{u_z}}{dt}}$$

⚠ $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ est une base fixe

b En coord cylindriques

$$d\vec{OM} = dr \vec{u_r} + r d\theta \vec{u_\theta} + dz \vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u_r} + r \dot{\theta} \vec{u_\theta} + \dot{z} \vec{u_z}$$

Meth 2

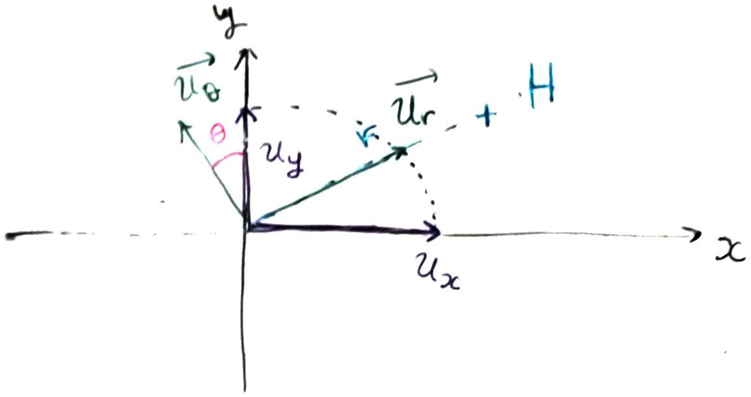
$$\vec{OM} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \dot{z}\,\vec{u_z} + \cancel{z\frac{d\vec{u_z}}{dt}}$$

⚠ $\vec{u_z}$: fixe

$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ mobile !!

Calcul de $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt}$, $\dfrac{d\vec{u_\theta}}{dt}$



$$\begin{cases} \vec{u_r}_{(t)} = \cos\theta_{(t)}\,\vec{u_x} + \sin\theta_{(t)}\,\vec{u_y} \\ \vec{u_\theta}_{(t)} = -\sin\theta_{(t)}\,\vec{u_x} + \cos\theta_{(t)}\,\vec{u_y} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{u_r}}{dt} &= -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_y} = \dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}) = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \\ \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} &= -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_y} = -\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}) = -\dot{\theta}\,\vec{u_r} \end{aligned}}$$

donc $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}$

4 Vecteur accélération

Meth 2

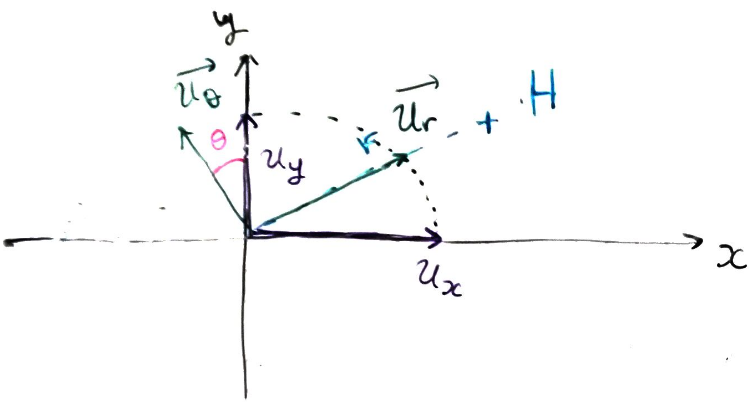
$$\vec{OM} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\cancel{\frac{d\vec{u_r}}{dt}} + \dot{z}\,\vec{u_z} + z\cancel{\frac{d\vec{u_z}}{dt}}$$

⚠ $\vec{u_z}$: fixe

$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ mobile !!

Calcul de $\frac{d\vec{u_r}}{dt}$, $\frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$



$$\begin{cases} \vec{u_r}_{(t)} = \cos\theta_{(t)}\,\vec{u_x} + \sin\theta_{(t)}\,\vec{u_y} \\ \vec{u_\theta}_{(t)} = -\sin\theta_{(t)}\,\vec{u_x} + \cos\theta_{(t)}\,\vec{u_y} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{u_r}}{dt} &= -\dot\theta\sin\theta\,\vec{u_x} + \dot\theta\cos\theta\,\vec{u_y} = \dot\theta(-\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}) = \dot\theta\,\vec{u_\theta} \\ \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} &= -\dot\theta\cos\theta\,\vec{u_x} - \dot\theta\sin\theta\,\vec{u_y} = -\dot\theta(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}) = -\dot\theta\,\vec{u_r} \end{aligned}}$$

donc $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot\theta\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}$

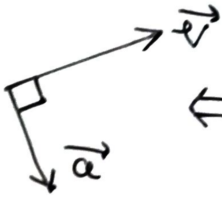
4 Vecteur accélération

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad \left[\|\vec{a}\|\right] = [m\,s^{-2}]$$

$$\|\vec{v}\| = \text{const}$$

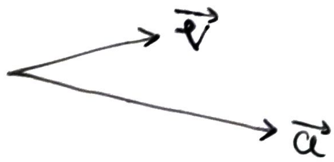
Conséquence

$$\text{Mouvement uniforme} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \text{const}$$
$$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = \text{const}$$
$$\Leftrightarrow \vec{v}^{\,2} = \text{const}$$
$$\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v} = \text{const}$$
$$\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v}\cdot\vec{a} = 0}$$

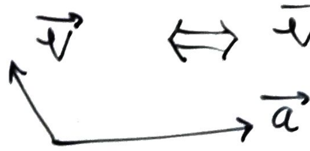
- 

$\Leftrightarrow$ mouvement uniforme

- mouvement accéléré $\Leftrightarrow \|\vec{v}\| \nearrow$
$\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{a} > 0$



- mouvement ralenti $\Leftrightarrow \|\vec{v}\| \searrow$
$\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{a} < 0$



a Coord cartésiennes

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{y}\,\vec{u_y} + \dot{z}\,\vec{u_z}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y} + \ddot{z}\,\vec{u_z}$$

il est content

10

b Coord cylindriques

$$\vec{OM} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}$$

car $\dot{\vec{u_r}} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\underbrace{\dot{\vec{u_\theta}}}_{-\dot{\theta}\,\vec{u_r}} + \ddot{z}\,\vec{u_z}$$

$$= (\underbrace{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}_{\substack{a_r \\ \text{acc. radiale}}})\,\vec{u_r} + (\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}_{\substack{a_\theta \\ \text{acc. orthoradiale}}})\,\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{u_z}$$

remq Exprimons $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{r}(2\dot{r}r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = a_\theta}$$

Cas particulier: mouvement plan ($z = \text{const}$)

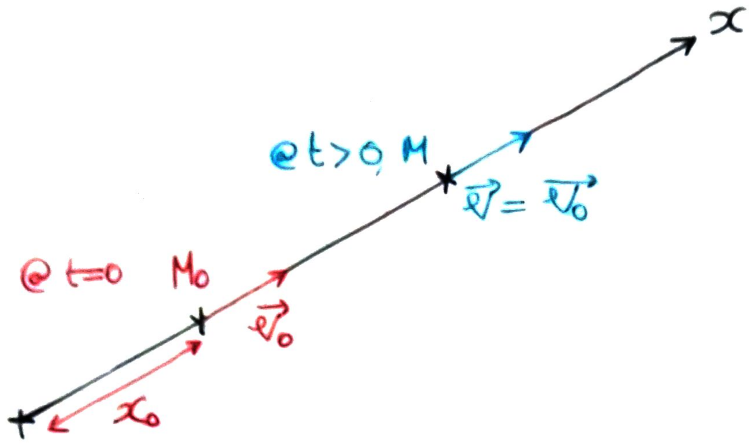
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\theta^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

IV Des exemples de mouvement

1 Mouvement uniforme

def

2 MRU



$$\forall t, \quad \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v} = \vec{const} = \vec{v_0}$$

On projette sur $\vec{u_x}$: $\vec{OM} = x\vec{u_x}$

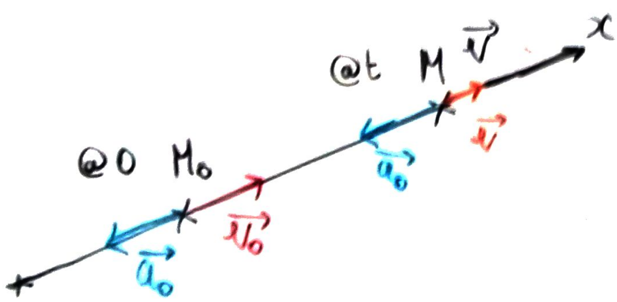
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v = v_0$$

On intègre :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + const \\ \underline{CI} \quad x(0) = 0 + const = x_0 \end{cases} \Rightarrow x = v_0 t + x_0$$

3 MRUV

$$\begin{cases} R \Rightarrow \text{direction } \vec{a} \text{ const} \\ UV \Rightarrow \|\vec{a}\| = const \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{const}$$



$$\vec{a_0} = \overrightarrow{\text{const}} = \dot{\vec{v}}$$

Projection sur (Ox) :

$$a_0 = \frac{dv}{dt} \quad \left(= \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

projection algébrique de l'accélération, $a_0 < 0$

remq On aurait pu choisir

$$-a_0 = \dot{\vec{v}}$$

ou

$$-\|\vec{a_0}\| = \dot{\vec{v}}$$

$$\begin{cases} v(t) = a_0 t + \text{const} \\ \underline{CI} \Rightarrow v(0) = v_0 = 0 + \text{const} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{v(t) = a_0 t + v_0}_{(*)} = \dot{x}$$

On primitive :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + \text{const} \\ \underline{CI} \Rightarrow x(0) = 0 + 0 + \text{const} = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

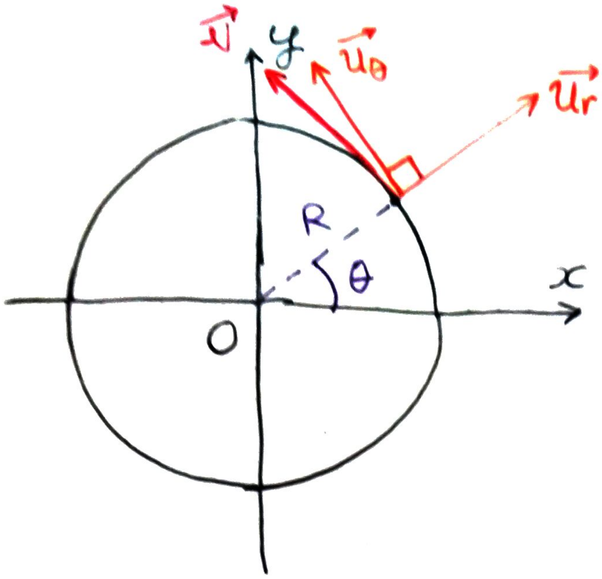
remq

$$x(t) - x_0 = t\left(\frac{1}{2} a_0 t + v_0\right)$$

$$= \frac{v - v_0}{a_0} \left(\frac{1}{2}(v - v_0) + v_0\right) \quad \text{d'après } (*)$$

d'où $$\boxed{x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_0}}$$

4 Mouvement circulaire



$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$= -R\omega^2\vec{u_r} + R\dot{\omega}\vec{u_\theta} \qquad \omega = \dot{\theta}$$

$$= -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} + \frac{dv}{dt}\vec{u_\theta} \qquad \frac{v}{R} = \omega$$

def

$\dot{\theta} =: \omega \quad [\mathrm{rad} \cdot s^{-1}]$ "vitesse angulaire"

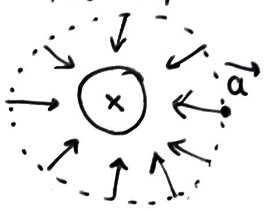
$\dot{\theta}$ est tangeante à la trajectoire

remq MCU

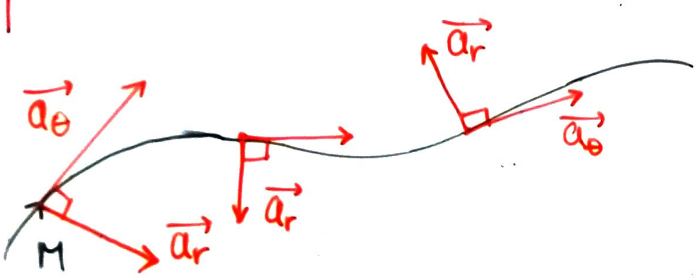
$\|\vec{v}\| = \text{const} = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \omega = \text{const}$

$$\Rightarrow \vec{a} = -R\omega^2\vec{u_r} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

MCU: $\vec{a}$ centripète



remq Généralisation au mouvement curviligne

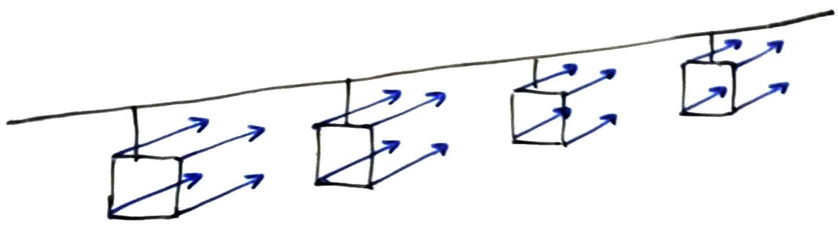


$\vec{a_r}$ pointe toujours vers le centre de courbure

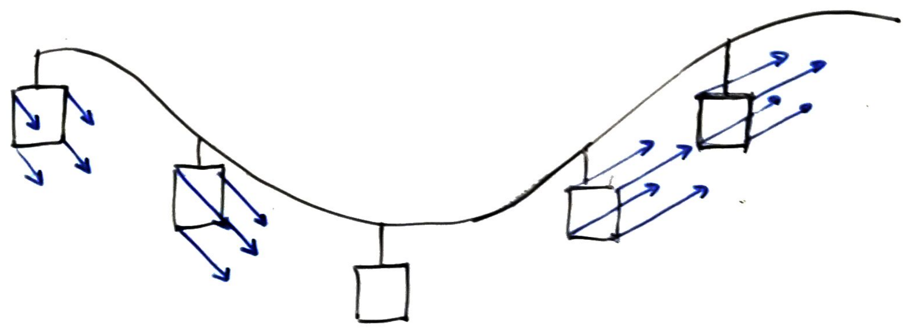
$\vec{a_\theta} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{u_\theta}$ donne les variations de la vitesse.
et est tangeante à la trajectoire

V Translations – Rotations

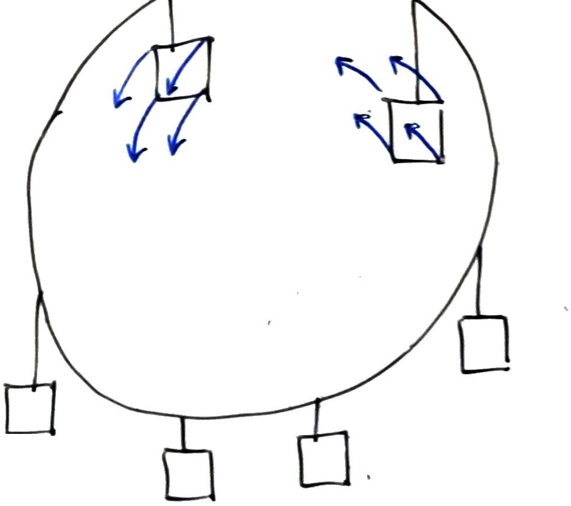
Un solide est en translation $\Longleftrightarrow$ Tout point du solide a le même vecteur vitesse $\forall t$.



Rectiligne

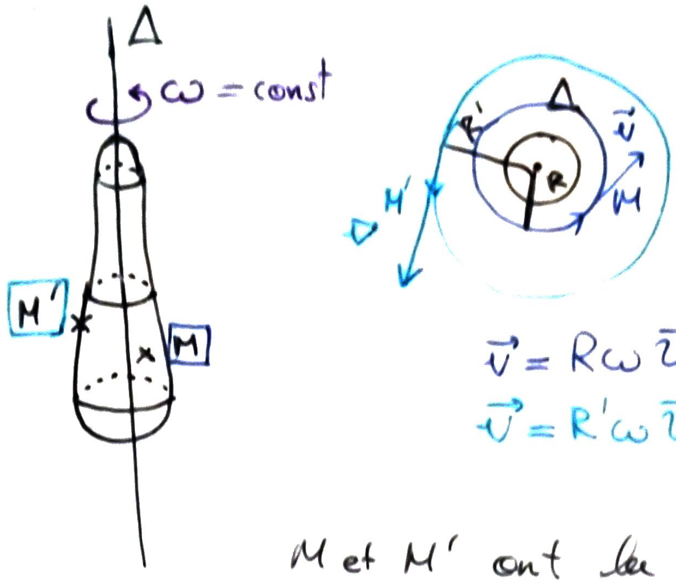


Curviligne



Circulaire

remq rotation autour du axe



$\vec{v} = R\omega \vec{u_\theta}$

$\vec{v'} = R'\omega \vec{u_\theta}$

M et M' ont la même vitesse angulaire (ω) mais des vitesse linéiques différentes ($\vec{v}$)