Signaux

I Notion de base

1 Définition

Grandeur physique dont la détermination permet d'accéder à une information souhaitée

<u>eg</u>

- courant, intensité (élec)
- position, accélération, vitesse (méca)
- lumière : onde électromagnétique
- pression sur un pneu de voiture
- température

2 Signaux périodiques

T : durée minimale entre deux répétitons identiques du signal

f : nombre de répétitions du signal par unité de temps

3 Ordre de grandeurs

<u>Onde sonore</u> 20 Hz ~ 20 kHz

<u>téléphonie</u> 300 Hz ~ 3.2 kHz (son transmis par un téléphone)

radio 102.5 MHz

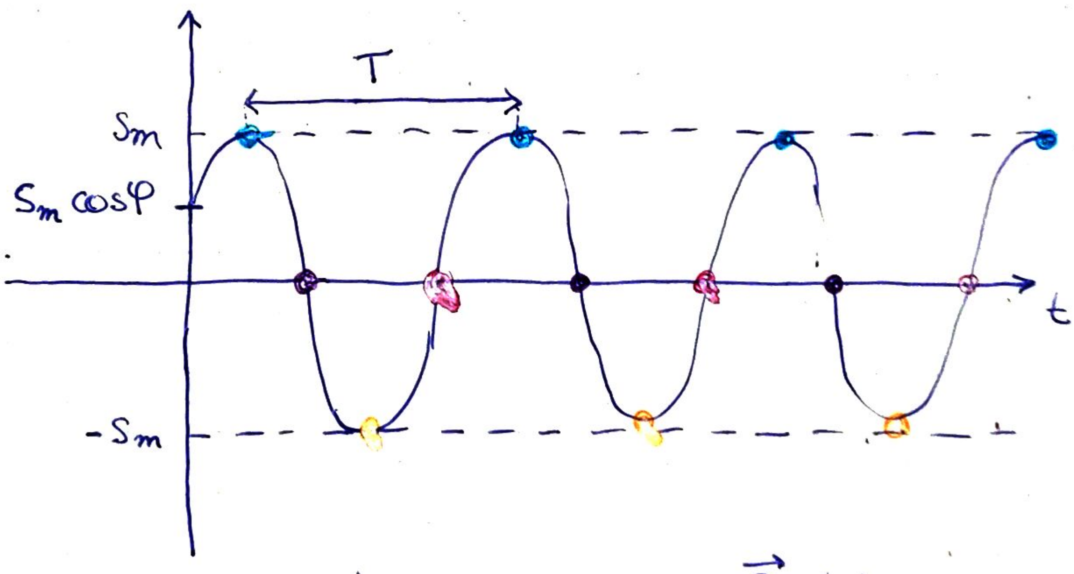
wifi 1 GHz ~ 5 GHz

II Représentation d'une grandeur sinusoïdale

Soit le signal $s(t) = \underbrace{S_m}_{\text{Amplitude}} \cos(\overbrace{\underbrace{\omega t}_{\text{Pulsation}} + \underbrace{\varphi}_{\text{Phase à l'origine [rad]}}}^{\text{Phase [rad]}})$

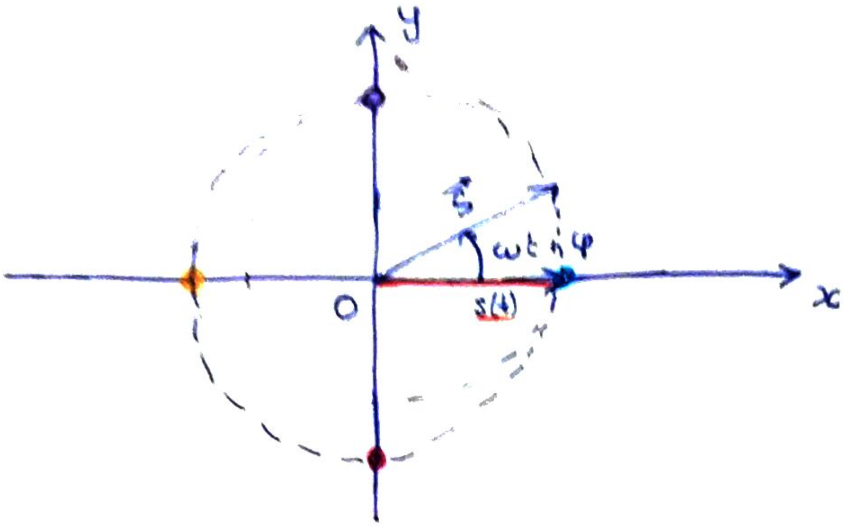
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [rad \cdot s^{-1}]$$

Représentation temporelle



On peut associer à s un vecteur $\vec{S}$ tel que

- $\|\vec{S}\| = S_m$
- Fait un angle $\omega t + \varphi$ par rapport à (Ox)



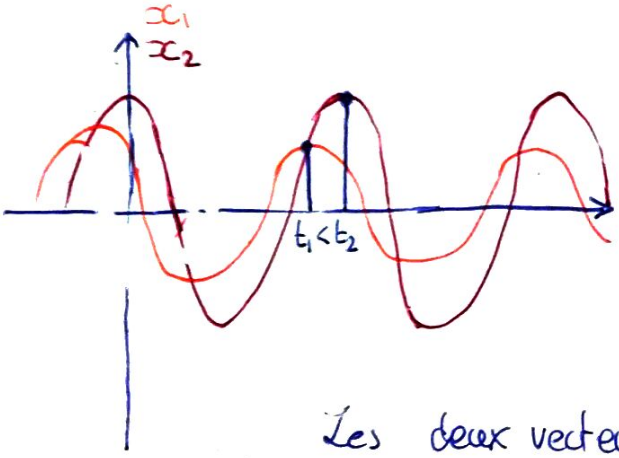
La projection de $\vec{S}$ sur (Ox) est $s(t)$

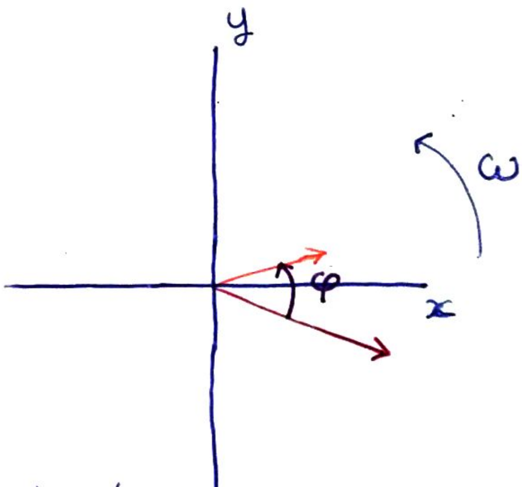
Quand t croît :

- $\vec{S}$ tourne autour de O décrivant un cercle de rayon S_m à une vitesse angulaire ω

$\vec{S}$ est appelé <u>vecteur de Fresnel</u>

<u>Intérêt</u>





Les deux vecteurs tournent à la vitesse ω
x_1 est en avance par rapport à x_2.

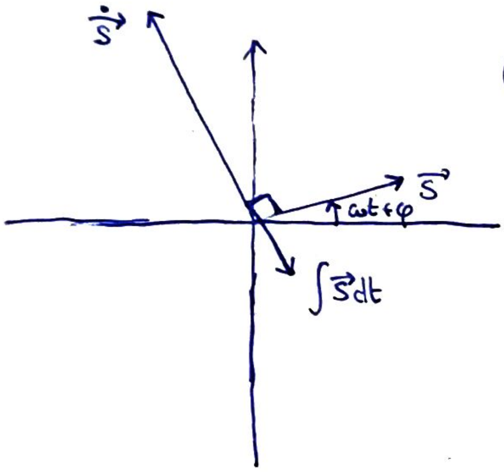
$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: déphasage de 1 / 2 avec $x_1 = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{s}(t) = -S_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$
$$= S_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int s(t)\,dt = \frac{S_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$
$$= \frac{S_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$



(avec $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$

On dit que $\vec{\dot{s}}$ est en avance de $\frac{\pi}{2}$ / à $\vec{s}$
quadrature

III Analyse spectrale

[poly]

Partie : SIGNAUX

Chap 2 Signaux

Extrait du programme officiel :

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux, spectre.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques. **Réaliser l'analyse spectrale d'un signal ou sa synthèse.** Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustiques et électromagnétiques.

III-Analyse spectrale.

- Rappel TS : donner le *La*

Avant de jouer toute œuvre musicale, les musiciens d'un orchestre accordent leur instrument. Par tradition, c'est le joueur de hautbois (ou le pianiste) qui donne le *la*, permettant ainsi au premier violon puis à tous les musiciens de s'accorder. « Donner le *la* » signifie que l'on donne une note de référence, le *la*, également appelé « la_3 » ou « *la* 440 », qui permet à chaque instrument une fois accordé de produire un son harmonieux. Cette note peut aussi être produite par un instrument nommé diapason, qui peut être électronique ou mécanique.

À l'aide d'un microphone relié à la carte son d'un ordinateur, on peut enregistrer des sons pour les traiter éventuellement à l'aide d'un logiciel adapté. Il est ainsi possible d'obtenir, pour le son enregistré, son spectre en fréquence, c'est-à-dire la représentation des différentes amplitudes des signaux périodiques qui composent le signal en fonction de leur fréquence.

Il a ainsi été enregistré, sur des durées équivalentes de 10 ms, le *la* 440 émis par un diapason **(Fig. 1)**, par un piano **(Fig. 2)**, puis par une flûte **(Fig. 3)**.

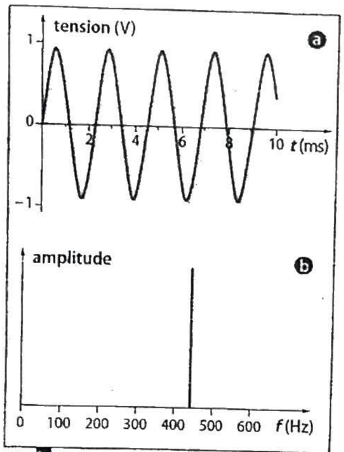


Fig. 1 ⓐ Enregistrement et ⓑ spectre en fréquence du *la* 440 du diapason.

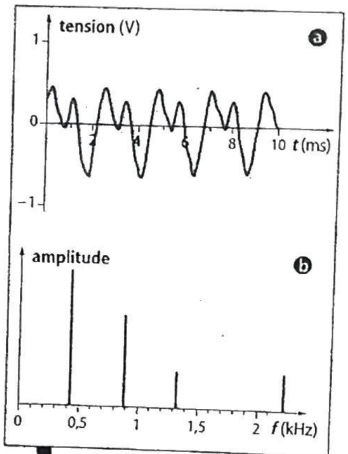


Fig. 2 ⓐ Enregistrement et ⓑ spectre en fréquence du *la* 440 du piano.

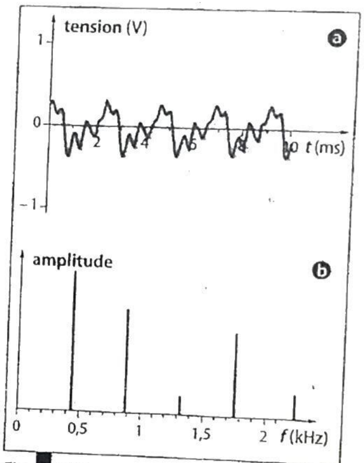


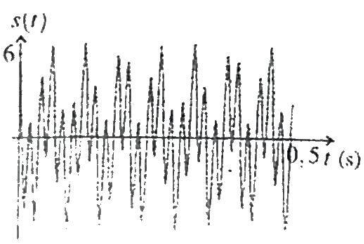
Fig. 3 ⓐ Enregistrement et ⓑ spectre en fréquence du *la* 440 de la flûte.

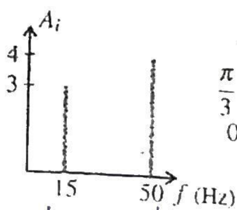
les spectre s'enrichit d'harmoniques dont les fréquences sont des multiples du fondamental

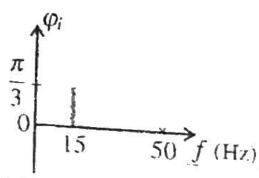
- Approche de l'analyse spectrale :

Tracer à la calculatrice la fonction $s(t) = 3\cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos(100\pi t)$

On obtient le graphe suivant ainsi que le spectre (amplitude et phase initiale)







graphe en amplitude

- Analyse spectrale d'un signal périodique. Série de Fourier.

On démontrera dans le cours de mathématiques, que sous certaines conditions de dérivabilité et de continuité, **« toute fonction f(t), périodique de période T_0 (donc de pulsation** $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ **et de fréquence f_0) peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont des multiples entiers de ω_0 ».**

Mathématiquement, cela s'écrit :

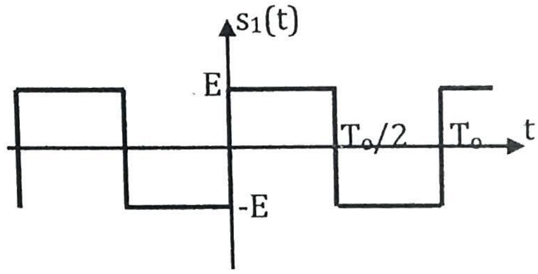
$$f(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

$A_0 = \dfrac{1}{T_o}\displaystyle\int_{[T_0]} f(t)dt$ $\Rightarrow$ A_o représente la valeur moyenne de f(t) souvent notée $< f(t) >$

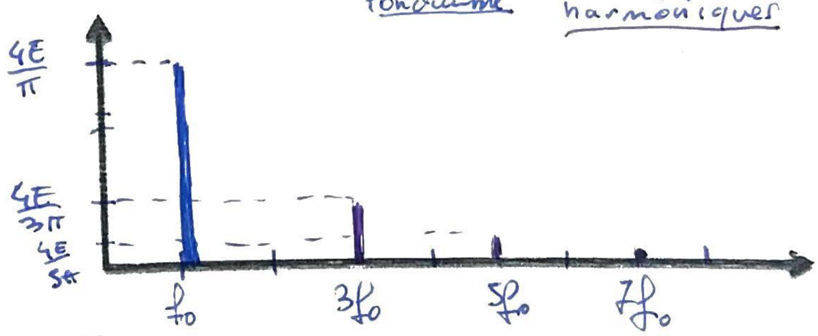
$A_n = \dfrac{2}{T_o}\displaystyle\int_{[T_0]} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ et $B_n = \dfrac{2}{T_o}\displaystyle\int_{[T_0]} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$

Exemples.

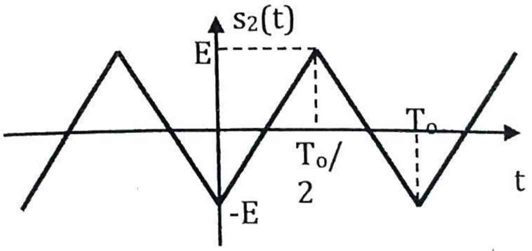
a) *signal créneau :*



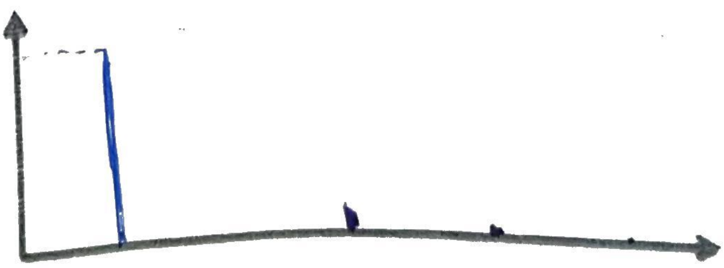
La décomposition donne : $s_1(t) = \frac{4E}{\pi}(\underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{fondamentale}} + \underbrace{\frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \cdots}_{\text{harmoniques}})$ de spectre :



b) *signal triangulaire :*



La décomposition donne : $s_2(t) = \frac{-8E}{\pi^2}(\cos(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 t)}{9} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{25} + \cdots)$ de spectre :



en physique, beaucoup de signaux ~~sont~~ périodiques, ils sont alors décomposables en séries de Fouriers une somme ~~un~~ infinie de fonctions sinusoidales :

- la fondamentale
- les harmoniques

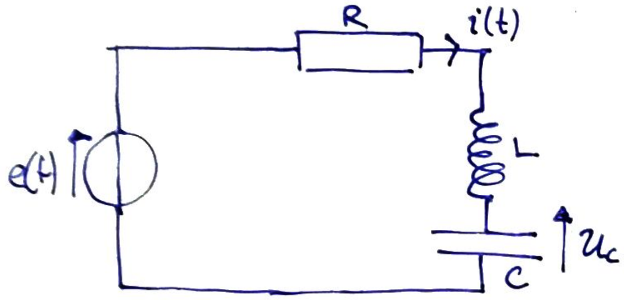
La fondamentale a toujours la même fréquence que le signal de départ

Signaux

I Régime sinusoïdal forcé

1 Mise en équation en élec

Soit le circuit RLC



$e(t) = E_m \cos(\omega t)$

Loi des mailles :

$$e(t) = u_c + L\frac{di}{dt} + Ri \qquad \text{et} \quad i(t) = C\dot{u}_c$$

$$\Rightarrow E_m \cos(\omega t) = u_c + LC\ddot{u}_c + RC\dot{u}_c$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E_m}{LC}\cos(\omega t)$$

On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \underbrace{\omega_0^2 E_m \cos(\omega t)}_{\text{sinusoïdal (variable !)}}$$

2 Mise en équation en méca

On note x l'allongement à l'éq.

$$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u_x} = -kx\,\vec{u_x}$$

$$\vec{P} + \vec{R_n} = \vec{0}$$

$$\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\,\vec{u_x}$$

NEW : $\exists$ une force excitatrice

$$\vec{f_e} = F_0\cos(\omega t)\,\vec{u_x}$$

On projette alors la 2^e loi de N. :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow\quad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$; $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$

$$\Rightarrow\quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}_{\text{2nd membre variable !}}$$

Dans les deux modèles, le second membre provient de l'excitation externe :

- GBF (exl. au RLC)
- $\vec{f_e}$

3 Principe de résolution

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E_m \cos(\omega t)$$

Solutions pour $\begin{cases} x(t) \\ u_c(t) \end{cases}$:

$$x(t) = x_{EH}(t) + \underline{\underline{x_{SP}(t)}}$$

$$x_{SP}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

rq $x_{EH}(t) \xrightarrow[t \to \underbrace{\text{“}\infty\text{”}}_{\text{quelques fois } \frac{1}{\omega_0}}]{} 0 \qquad \forall \Delta \Leftrightarrow \forall Q$

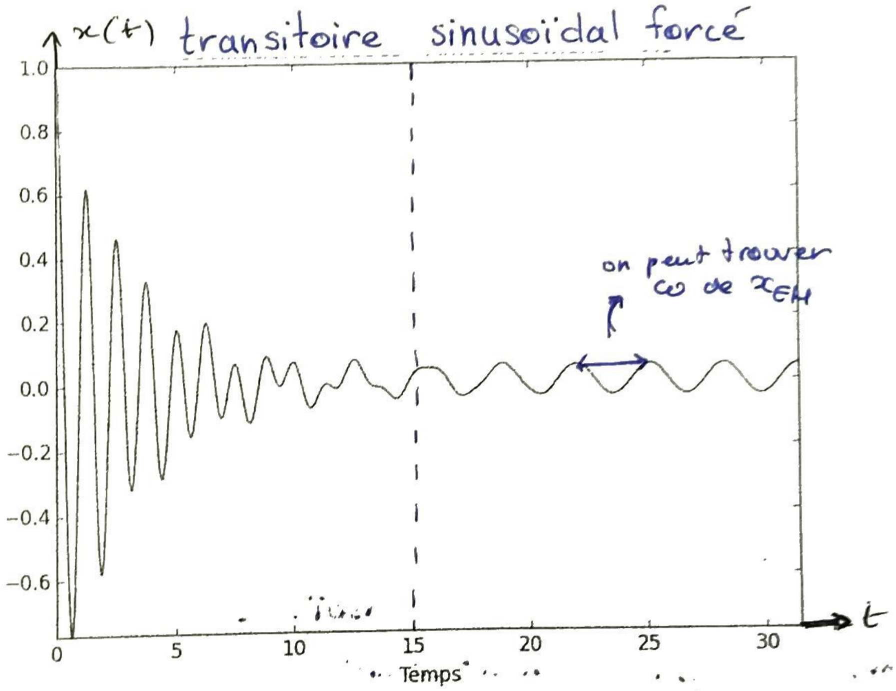
donc $x(t) \xrightarrow[t \to \text{“}\infty\text{”}]{} x_{SP}(t) \qquad \forall \Delta \Leftrightarrow \forall Q$

$= X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Partie : SIGNAUX

Chap 15 Régime sinusoïdal forcé

Régime sinusoïdal forcé, impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	**Mettre en œuvre un dispositif expérimental autour du phénomène de résonance.** Utiliser la construction de Fresnel et la méthode des complexes pour étudier le régime forcé en intensité ou en vitesse. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase dans le cas de la résonance en intensité ou en vitesse. À l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation. Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.



Passage du régime transitoire **au régime** sinusoïdal {forcé ou permanent[1] ou harmonique

[1] En permanence sinusoïdal

[poly]

"$\underbrace{\text{Très rapidement}}_{qq\ 1/\omega_0}$", la solution de l'EH s'estompe et :

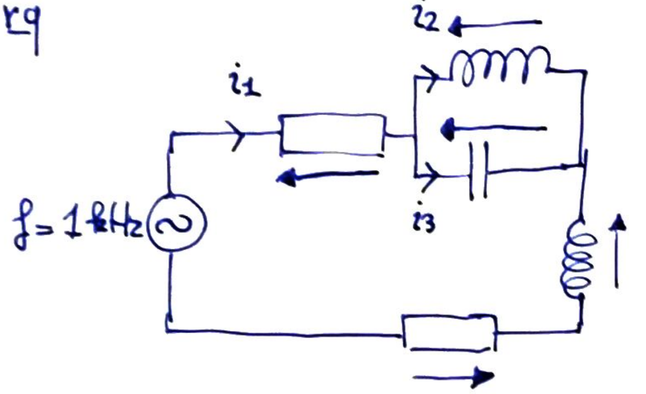
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Il a la même pulsation ω que $\underbrace{\text{l'excitateur}}_{\text{GBF, } \vec{f_e}}$

d'où le nom de régime sinusoïdal $\underbrace{\text{forcé}}$

par l'excitateur,
qui imposé la pulsation ω

rq



N'importe quel grandeur obéit à une équadiff dont le second membre dépendra de l'excitateur de pulsation $\omega = 2\pi f$.

Chacune des grandeurs variera comme le second membre, de manière sinusoïdale, avec une pulsation imposée par l'excitateur.

II Représentation d'une grandeur sinusoïdale

Soit la grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On peut lui associer un vecteur de Fresnel:

- On définit: la représentation complexe du signal x

$$\underline{x}^{1}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + j X_m \sin(\omega t + \varphi)$$
$$= X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Ainsi $x(t) = \mathrm{Re}\,\underline{x}$

- On définit: l'amplitude complexe du signal

$$\underline{x}(t) = \underbrace{X_m e^{j\omega t}}\, e^{j\varphi}$$

$\underline{X}^{1}$: amplitude complexe

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{X} e^{j\omega t}$$

rq On sait que ∀ les signaux seront sinu. de pulsation ω imposée par l'excitateur Il suffit donc de connaître X_m et la phase à l'origine φ du signal pour en avoir l'expr complète

---

[1] $\underline{x}$, $\underline{X}$ sont des notations

rq L'amplitude $X_m = |\underline{X}|$

la phase à l'orig $\varphi = \arg \underline{X}$

prop

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{\dot{x}} = X_m j\omega e^{j(\omega t \varphi)}$$

$$= j\omega \underline{x}$$

Dériver une grandeur complexe revient à la multiplier par $j\omega$

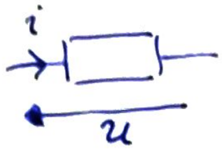
$$\int \underline{x} = X_m \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} dt$$

$$= \frac{\underline{x}}{j\omega}$$

Primitiver une grandeur complexe revient à la diviser par $j\omega$

III Dipôles passifs linéaires

1 Convention

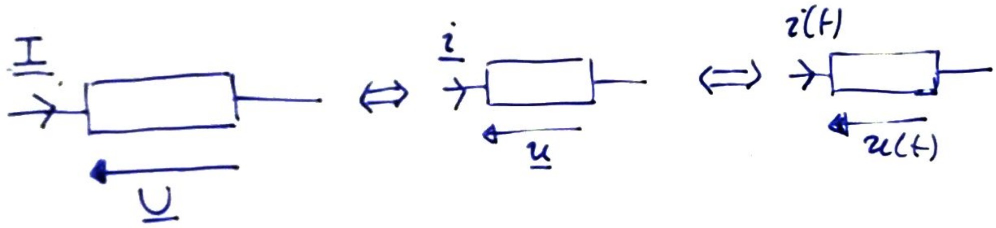
Soit un dipôle .

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ $\qquad$ $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ $\qquad$ $\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$

$\underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$ $\qquad$ $\underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$

Le dipôle



2 Impédance - Admittance

<u>déf</u> Pour le dipôle précédent :

- impédance $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \in \mathbb{C}$

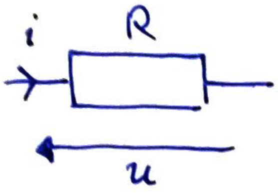
  rq $|\underline{Z}|$ en Ω

- admittance $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_m}{U_m} e^{-j(\varphi_u - \varphi_i)} \in \mathbb{C}$

  rq $|\underline{Y}|$ en $\Omega^{-1} = S$

3 Dipôles passifs usuels

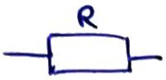
a Conducteur Ohmique



Loi d'Ohm :

$$\mathrm{Re}\left(\begin{array}{l} u = Ri \\ \underline{u} = R\underline{i} \end{array}\right.$$

On a : $\dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = R = \underline{Z}_R$ l'impédance du dipôle R

L'impédance du  est égal à la résistance

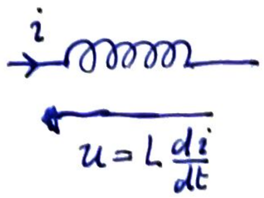
rq $\underline{u} = R\underline{i}$

$\underline{U} = R\underline{I}$

$\varphi_u = 0 + \varphi_i \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$

$\Rightarrow$ u et i sont en phase

b Bobine idéale



$$\mathrm{Re}\left(\begin{array}{l} u = L\dfrac{di}{dt} \\ \underline{u} = L\dfrac{d\underline{i}}{dt} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \underline{u} = Lj\omega\underline{i}$

On a $\dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = jL\omega$[1] $= \underline{Z}_L$ l'impédance L

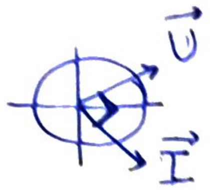
---

1 $jL\omega$ et pas un autre sens

rq $\underline{u} = \underline{Z}_L \, \underline{i} = jL\omega \underline{i}$

$\underline{U} = jL\omega \underline{I}$

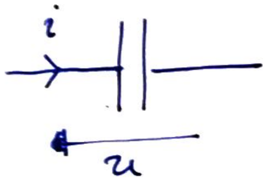
$\varphi_u = \frac{\pi}{2} \varphi_i$ arg



u est en quadrature avance par rapport à i

[poly #1]

c Condensateur idéal



$i = C\dot{u}$

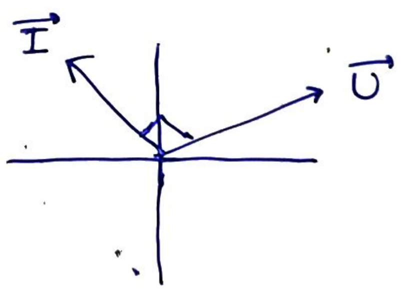
Re $\underline{i} = C\dot{\underline{u}} = Cj\omega\underline{u}$

On a: $\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} = \underline{Z}_C$. l'impédence bla bla bla

rq $\underline{i} = jC\omega\underline{u}$

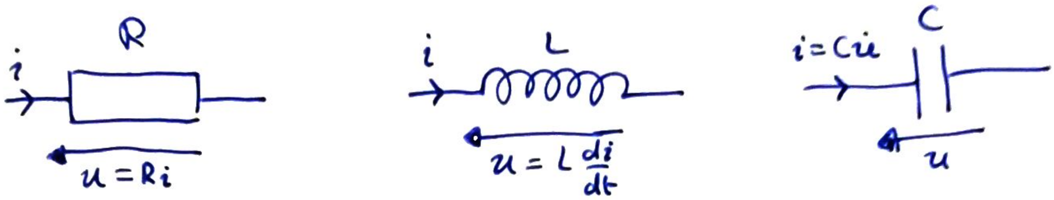
$\underline{I} = jC\omega\underline{U}$

$\varphi_i = \frac{\pi}{2} \varphi_u$ arg

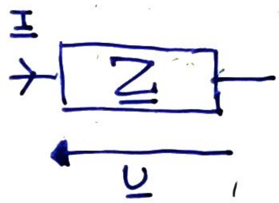


$\begin{cases} u \text{ est en quadrature retard par rapport à } i \\ i \text{ avance } u \end{cases}$

d Conclusion



$\Downarrow$ en RSF



$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$$

Loi d'Ohm (généralisée)

$$\begin{cases} \underline{Z}_R = R \\ \underline{Z}_L = jC\omega \\ \underline{Z}_C = \dfrac{1}{jL\omega} \end{cases}$$

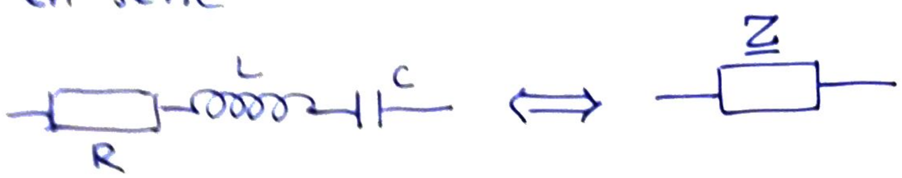
Grâce à $\mathbb{C}$, toutes les équations sont devenues

L I N É A I R E S

(i.e., quand c'est complexe c'est plus simple)

4 Association de dipôles

a en série

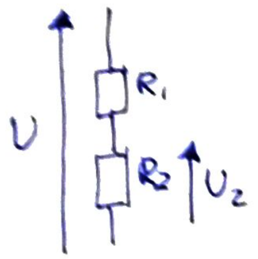


$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

car en série les tensions s'associent en sommant

$$= R + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

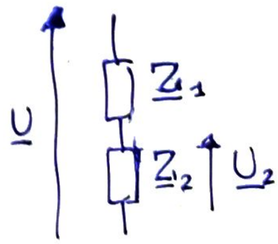
$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$



$$U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} U$$

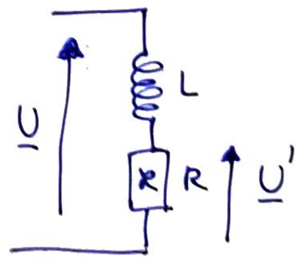
$\Longleftrightarrow$

RSF



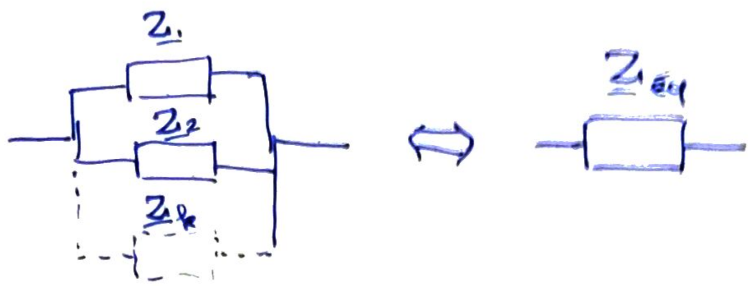
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

eg.



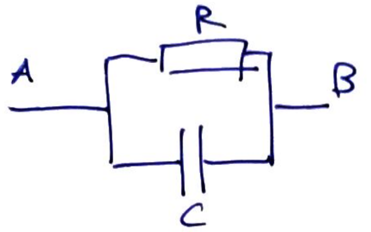
$$\underline{U}' = \frac{R}{R + jL\omega} \underline{U}$$

b en parallèle



$$\underbrace{Y_{eq}}_{\text{admittance}} = \frac{1}{Z_{eq}} = \sum_k \frac{1}{Z_k} = \sum_k Y_k$$

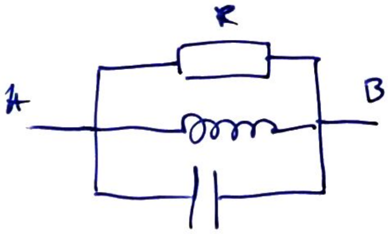
eg



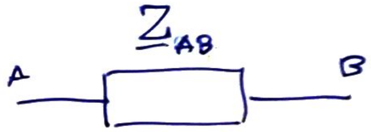
$\Longleftrightarrow$

$$Z_{AB} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C}$$

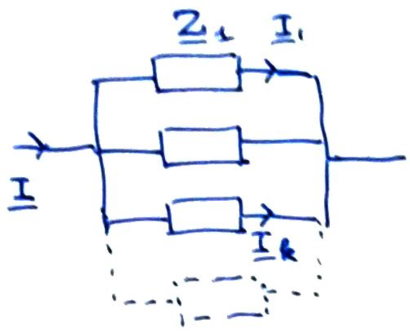
$$= \frac{R}{jRC\omega + 1}$$



$\Longleftrightarrow$

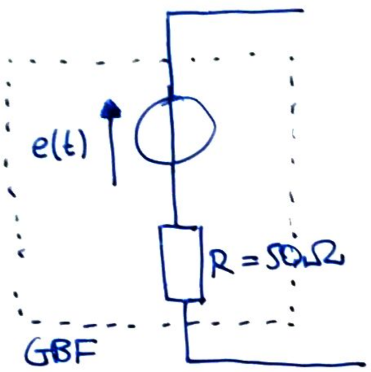


$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

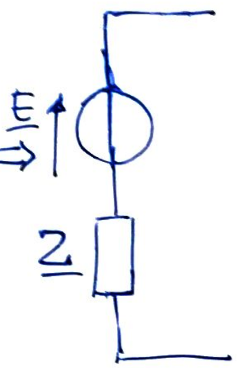


$$\underline{I}_k = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_k}}{\sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_i \underline{Y}_i}$$

4 Dipôles actifs



$\Leftrightarrow$



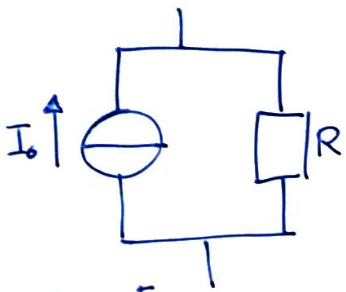
$\boxed{\text{Thevenin}}$

$e(t) = E_m \cos(\omega t)$

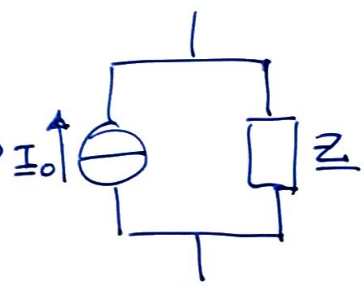
$\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$

$\underline{E} = E_m$

$\Updownarrow$



$\Leftrightarrow$



$\boxed{\text{Norton}}$

$I_0 = \frac{E}{R}$

$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$

$e^{j\varphi}$ des idées de génie

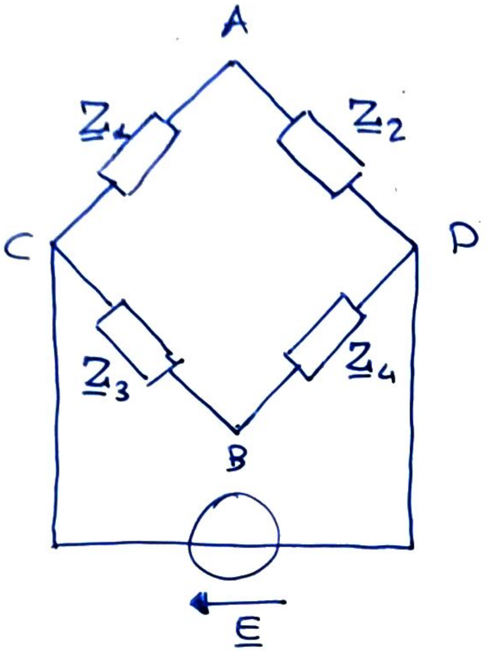
V Lois en RSF

Puisque l'on vient de se ramener à des lois similaires pour tt les dipôles, tt les lois vues en régime permanent vont s'appliquer :

- loi des mailles
- loi des noeuds
- diviseurs
- loi de Pouillet
- th de Millman

$$\underline{V}_N = \frac{\sum_k \frac{\varepsilon_k \underline{E}_k + \underline{V}_k}{\underline{Z}_k} + \sum_q \varepsilon_q \underline{I}_{0,q}}{\sum_k \underline{Y}_k}$$

eg Pont de Wheatstone



On dit que le pont est équilibré si $\underline{U}_{AB} = 0$

$$\underline{U}_{CA} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{E} \qquad \underline{U}_{CB} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}\underline{E}$$

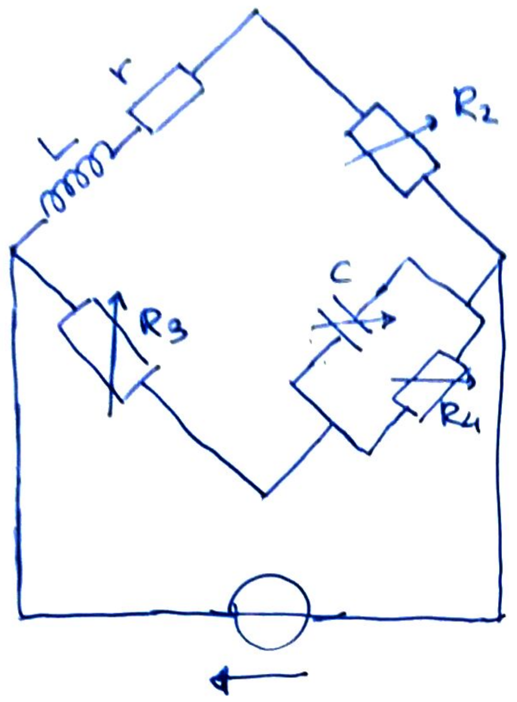
$$\underline{U}_{CB} - \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{AB} = \left(\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\right)\underline{E}$$

Le pont est équilibré si:

$$\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4$$

Grâce à cette méthode, on peut déterminer (L, r)



$$\underline{Z}_2 = R_2$$

$$\underline{Z}_3 = R_3$$

$$\underline{Z}_1 = r + jL\omega$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{\frac{R_4}{jC\omega}}{R_4 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_4}{1 + jR_4C\omega}$$

$$\underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1\,\underline{Z}_4$$

$$\Leftrightarrow R_2R_3 = (r + jL\omega)\frac{R_4}{1 + jR_4C\omega}$$

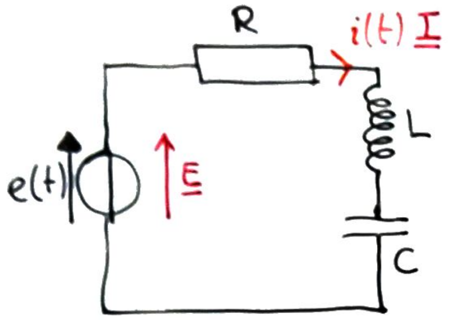
$$\Leftrightarrow R_2R_3(1 + jR_4C\omega) = R_4(r + jL\omega)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_2R_3 = R_4 r \\ R_2R_3\cancel{R_4}C\cancel{\omega} = \cancel{R_4}L\cancel{\omega} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{R_2R_3}{R_4} \\ L = R_2R_3C \end{cases}$$

VI Résonances en intensité et en vitesse

1. En intensité



$e(t) = E_m \cos(\omega t)$

On cherche $i(t)$ sous la forme :
$I_m \cos(\omega t + \varphi)$
même forme & pulsation que celle imposée par le GBF : RSF

On cherche à exprimer I_m et φ

On passe en notation complexe.

$\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$ $\qquad$ $\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

$\underline{E} = E_m e^{j0}$ $\qquad$ $\underbrace{\underline{I} = I_m e^{j\varphi}}_{}$

I_m et φ contenues dans $\underline{I}$

Loi de Pouillet :

$$\underline{I} = \frac{\sum_k \varepsilon_k E_k}{\sum_k R_k} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{E}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Ainsi $\begin{cases} I_m = |\underline{I}| \\ \varphi = \arg \underline{I} \end{cases}$

- $I_m = |\underline{I}| = \dfrac{|\underline{E}|}{|R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})|}$

$$= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

rq L'amplitude du courant dépend de la pulsation imposée par le GBF.

<u>Graphe</u> ($I_m(\omega)$):

- $R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \geq R^2$

  $I_m \leq \frac{E_m}{R}$

- $\lim_{\omega \to 0} I_m(\omega) = 0$

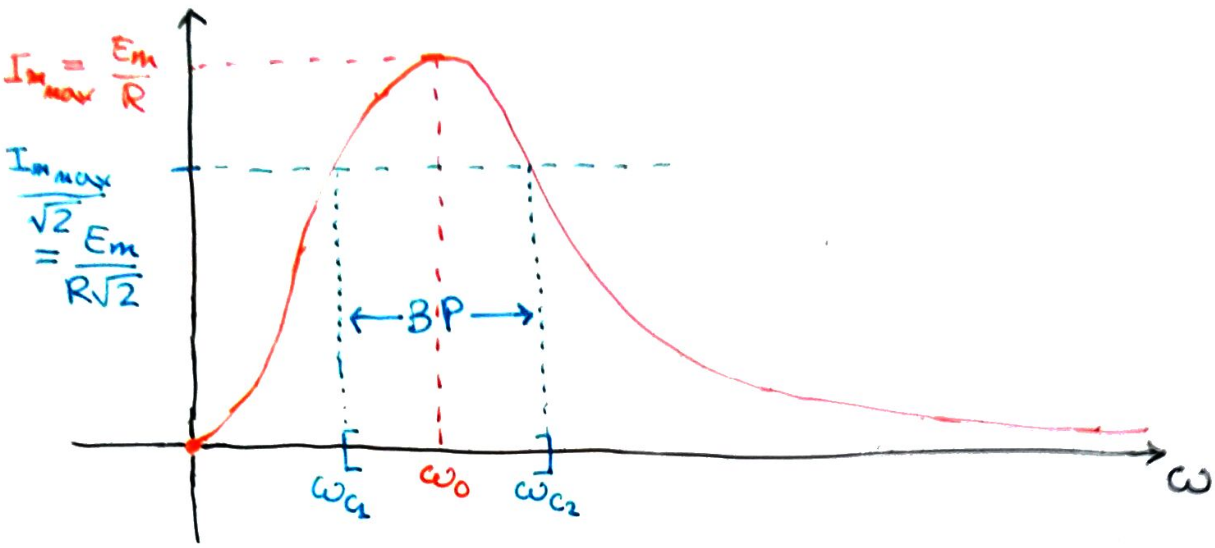
  $\lim_{\omega \to \infty} I_m(\omega) = 0$

- $R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 = R^2 \Leftrightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$

$$\Leftrightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

$$\Leftrightarrow LC\omega^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \ !$$



On dit qu'il y a résonance en <u>intensité</u>

La pulsation de <u>r</u>ésonance : $\omega_{\underline{r}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

<u>def</u> On définit <u>la bande-passante</u> BP

C'est l'intervalle de $\begin{cases} \text{pulsations} \\ \text{fréquences} \end{cases}$ tq

$$I_m(\omega) \geqslant \frac{I_{m_{max}}}{\sqrt{2}}$$

On cherche alors les pulsations dites de coupures ω_{c_1} et ω_{c_2}

$$I_m(\omega) = \frac{I_{m_{max}}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}\,R}$$

1. Simplifier E_m
2. Inverser
3. Élever au carré

$$\Leftrightarrow R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2$$

$$\Leftrightarrow \left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right) = R^2$$

$$\Leftrightarrow L\omega-\frac{1}{C\omega} = \pm R$$

$$\Leftrightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = R^2C^2 + 4LC > 0$$

$$\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC}$$

$$\omega_{c_1} = \frac{RC+\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC} \; ; \; \omega_{c_2} = \frac{-RC+\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC} \quad \left(\sqrt{\Delta} > \sqrt{R^2C^2}\right)$$

La largeur de la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2LC} - \frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{R}{L} = \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{\text{RLC série}}}$$

Lorsque le facteur de qualité est grand, la BP est plus étroite :
On dit que la résonance est plus aiguë/Q carac. l'acuité de la réso

• $\varphi = \arg \underline{I}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\varphi = \arg \frac{E_m}{\cdots\cdots}$$

$$= \arg E_m - \arg\left(R + j\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

$$= 0 - \arg\left(R + j\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

$$\cos\varphi = \cos\left(-\arg\left(R + j\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\right)\right) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}} > 0 \Rightarrow \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\sin\varphi = \sin\left(-\arg\left(R + j\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\right)\right) = \frac{L\omega + 1/C\omega}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\tan\varphi = \tan\left(-\arg\left(\cdots\cdots\cdots\right)\right) \overset{*}{=} -\tan\arg\left(\cdots\cdots\right)$$

$$= -\frac{L\omega + \frac{1}{C\omega}}{R} \quad \text{car } R > 0$$

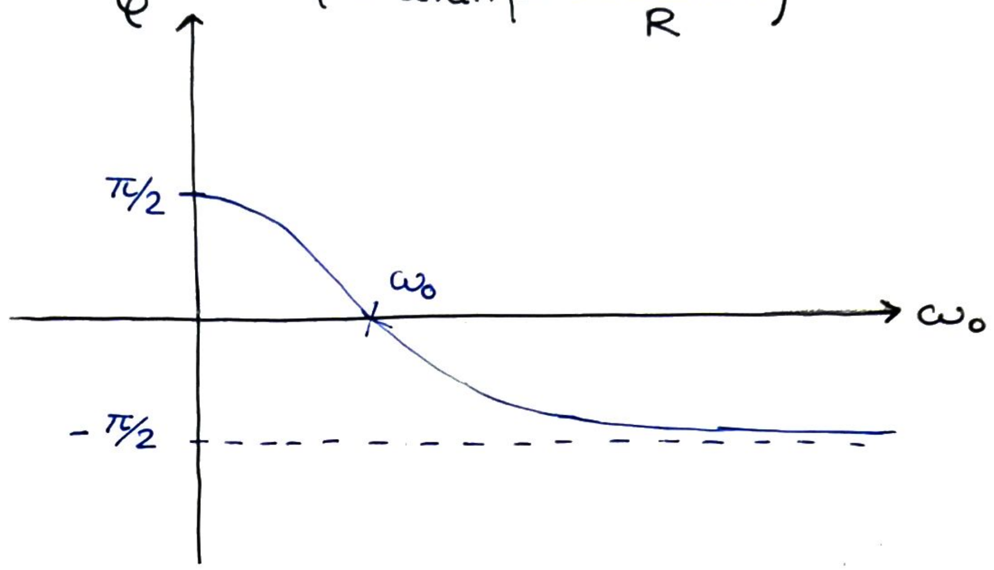
• $\lim_{\omega \to 0} \varphi \overset{*}{=} \frac{\pi}{2}$

$\lim_{\omega \to \infty} \varphi \overset{*}{=} -\frac{\pi}{2}$

$\varphi(\omega_0) \overset{*}{=} 0$

$*$ ω_0 est tq $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(-\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right)$$



https://sciences.univ-nantes fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/transfert2RLC.php

Deux manières de repérer la résonance en intensité :

- On fait varier f pour trouver une amplitude I_m maximale
- On fait varier f jusqu'à obtenir un déphasage nul.

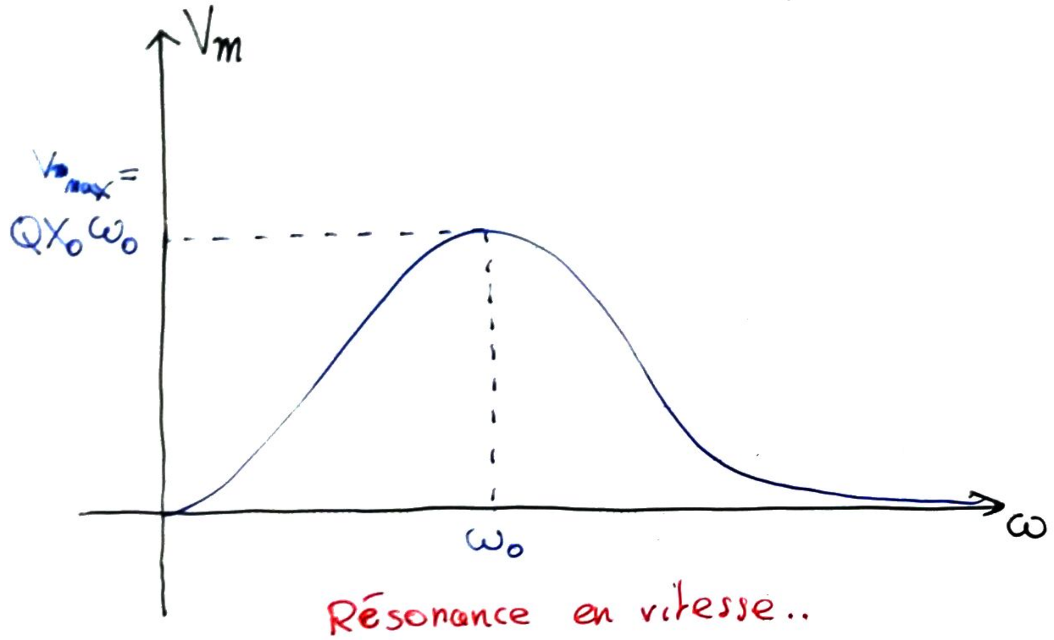
L'amplitude complexe de la vitesse

$$\underline{V} = V_m e^{j\varphi} \qquad (\underline{v} = \underline{V} e^{j\omega t})$$

$$= \frac{Q\omega_0 X_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

L'amplitude de la vitesse:

$$V_m = |\underline{V}| = \frac{Q X_0 \omega_0}{\sqrt{1^2 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$



Résonance en vitesse..

V_m passe un max lorsque dénominateur(V_m) passe par un min, ie

la parenthèse est nulle, ie $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0$.

donc avec $\omega = \omega_0$

BP: intervalle de pulsation tq $V_m > \frac{V_{m\,max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{Q\omega_0 X_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{Q\omega_0 X_0}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm\frac{1}{Q}$$

$$\omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0 \qquad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega^2\omega_0^2 > 0$$

Racines $\quad \omega = \dfrac{\pm\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$\Delta\omega = \frac{\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

$$\underline{V} = \frac{\omega_0 Q X_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = V_m e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \arg \underline{V}$$

$\vdots$

$$= \arctan\left(\qquad \qquad \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0 \qquad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega^2\omega_0^2 > 0$$

Racines $\quad \omega = \dfrac{\pm \frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$\Delta\omega = \frac{\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

$$\underline{V} = \frac{\omega_0 Q X_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = V_m e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \arg \underline{V}$$

$$= \cancel{\arg(\omega_0 Q X_0)} - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\left(-\arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right)\right) \quad \text{car } 1 \neq 0$$

et $\mathrm{Re}(\ldots) = 1$

$$= \arctan\left(-\tan \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right) \quad \text{par imparité de tan}$$

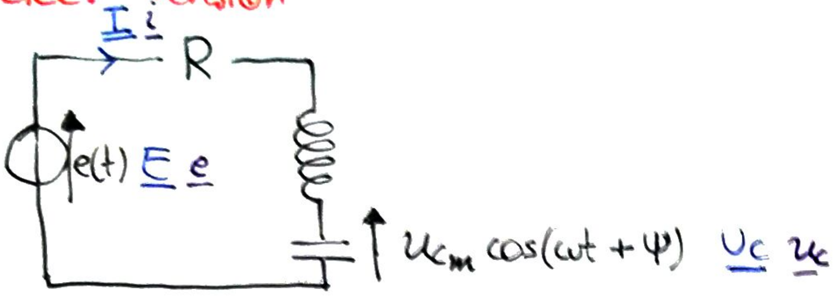
$$= \arctan\left(-\frac{Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{1}\right) \qquad \tan(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$$

$$= \arctan\left(-Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

##Signaux##

VII Autres résonances

En élec : Tension



$e(t) = E_m \cos(\omega t)$

$\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$ $\qquad \underline{u_c} = U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi)}$

$\underline{E} = E_m$ $\qquad \underline{U_c} = U_{cm} e^{j\varphi}$

On cherche U_{cm} et φ

$$\underline{U_c} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L} + \underline{Z_R}} \underline{E} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} \underline{E}$$

$$= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \underline{E}$$

Mise en forme (vrai qu'en RLC)

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$

$$\underline{U_c} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \underline{E}$$

$RC = \frac{1}{Q\omega_0}$

On pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la $\boxed{\text{pulsation réduite :}}$

$$\underline{u_c} = \frac{1}{1-u^2+j\frac{u}{Q}}\,\underline{E}$$

Or $\underline{u_c} = u_{cm}\,e^{j\psi} \Rightarrow \begin{cases} u_{cm} = |\underline{u_c}| \\ \psi = \arg \underline{u_c} \end{cases}$

En méca : Élongation

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\omega_0^2 X_0}_{=\frac{F_0}{m}}\cos(\omega t)$$

Re(·)

On cherche à exprimer :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{x} &= X_m e^{j(\omega t+\psi)} \\ \underline{X} &= X_m e^{j\psi} \end{aligned}}$$

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$\cancel{= -\omega^2 X_m e^{j(\omega t+\psi)} + j\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\,e^{j(\omega t+\psi)} + \omega_0^2\omega\, e^{j(\omega t+\psi)}\right) = \omega_0^2 X_0 \cos\omega t}$$

$$-\omega^2 \underline{x} + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

$$\underline{X} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} X_0 \quad \Big\} \text{ comme } u_c$$

$$= \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \qquad \text{avec } u \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega}{\omega_0} \text{ la pulsation réduite}$$

$$\underline{X} = X_m e^{j\varphi} \Rightarrow \begin{cases} X_m = |\underline{X}| \\ \varphi = \arg \underline{X} \end{cases}$$

$$X_m = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \qquad \left(\text{resp } U_{c_m} = \frac{E_m}{\cdots}\right)$$

Posons $T(u) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$

$$\begin{cases} T \xrightarrow[0]{} 1 \quad * \\ \\ T \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad * \end{cases}$$

Existe-t-il un maximum pour T ?

$$T(u) = \left((1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}\right)^{-1/2}$$

$$T'(u) = -\frac{1}{2}\left(2(1-u^2)(-2u) + \frac{2u}{Q^2}\right)\left((1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$T'(u) = 0 \Leftrightarrow \cancel{2}(1-u^2)(-2u) = -\frac{\cancel{2}u}{Q^2} \text{ ou } \frac{1}{\left((1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow u\left((-2)(1-u^2) + \frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ \text{ou} \\ -2-2u^2 = -\frac{1}{Q^2} \end{cases} \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{\frac{Q^{-2}+2}{-2}}$$

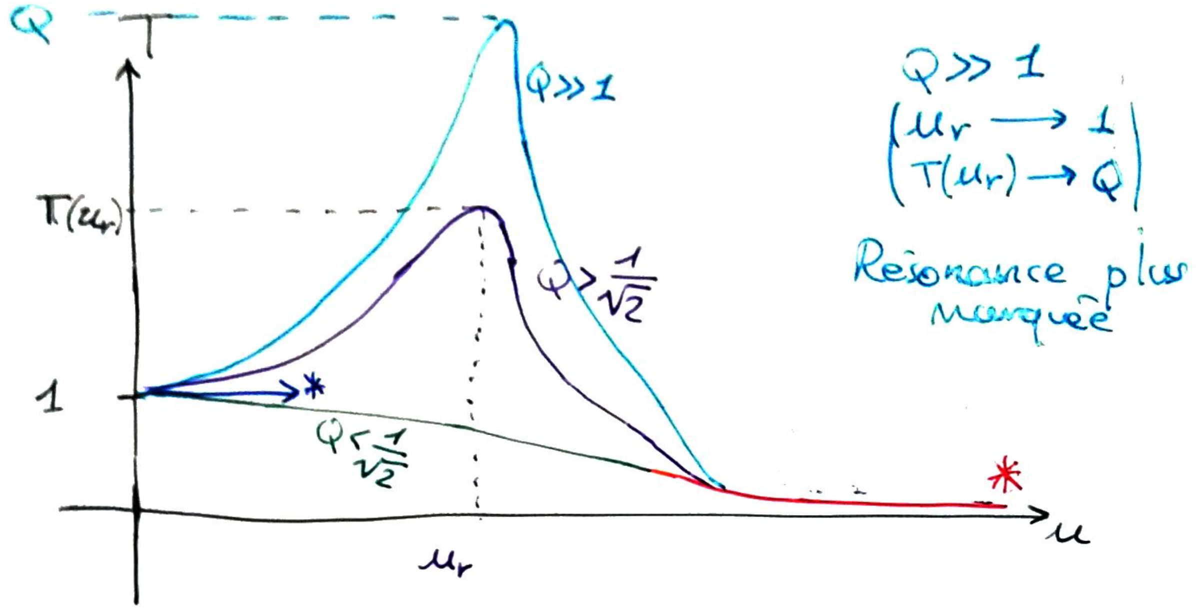
$$= \pm\sqrt{+\frac{1}{2Q^2} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2Q^2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ \text{ou} \\ u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{cases} \text{ n'existe que si } 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

alors $u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$



Le phénomène de résonance existe ssi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La pulsation réduite de résonance $u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Le max vaut alors :

$$T(u_r) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q}}{Q^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

$$\underline{X} = \frac{X_0}{1-u^2+j\frac{u}{Q}} = X_m e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \arg \underline{X} = \arg \frac{1}{1-u^2+j\frac{u}{Q}} \qquad (\text{resp. } \underline{u_c})$$

$$= -\arg\left(1-u^2+j\frac{u}{Q}\right)$$

$$-\sin\varphi = -\frac{\operatorname{Im}\underline{X}}{|\underline{X}|} = \frac{-\frac{u}{Q}}{\sqrt{(-u^2)^2+\frac{u^2}{Q^2}}}$$

$$< 0$$

$$-\tan\varphi = \frac{-\operatorname{Im}\underline{X}}{\operatorname{Re}\underline{X}} = \frac{u/Q}{1-u^2}$$

$\underline{u \to 0}$: $\tan\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$

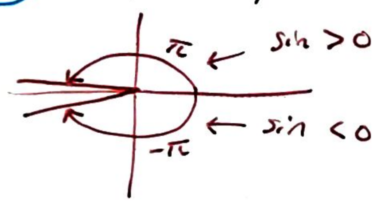
$\underline{u \to +\infty}$: $\tan\varphi \to 0$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{u}{Q}\cdot\frac{1}{1-u^2}\right) \quad (u<1) \quad \left(\arg z = \arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \text{ și } \operatorname{Re} z > 0\right)$$

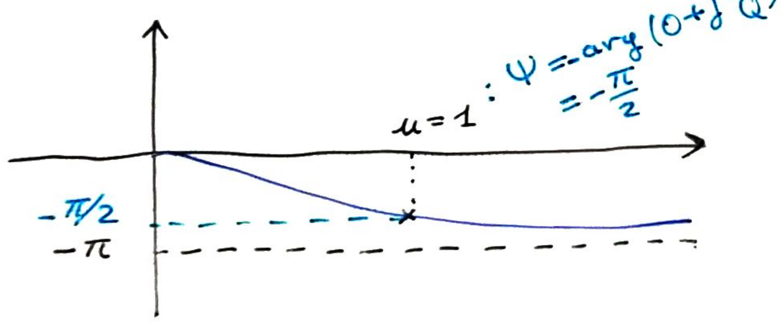
$$\operatorname{atan}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \pm\pi \text{ și } \operatorname{Re} z < 0$$

$$= -\arctan\left(\frac{u/Q}{1-u^2}\right) = \pm\pi \quad (u>1)$$

$(\sin\varphi < 0)$



$$\varphi = -\arctan\frac{u/Q}{1-u^2} - \pi \quad \text{și } u>1$$



[poly] au verso: rajouter: "ou résonance en élongation en mesure"
@ titre

rajouter: "= u"
@ droite: axe: "x"

rajouter: "= X_m"
@ droite: axe: "U_m"

rajouter: courbe pour $Q \gg 1$
label: $Q_4 \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$
@ graphe #1

eg L'exemple du Pont de Tacoma, 1840

Il y a présence d'une excitation (le vent) probablement périodique donc décomposable en série de Fourier (fondamentale, des harmoniques multiples de ~~la~~ fondamentale).

Ensuite la structure du pont (ou gratte-ciel, bateau, avion) possède, comme l'exemple de l'oscharino du cours, des ~~pu~~lsations propres (intrinsèques): si par malchance l'une des pulsations excitatrices coïncide avec une des pulsations propres, il peut y avoir des phénomènes de résonance en vitesse et en élongation destructifs