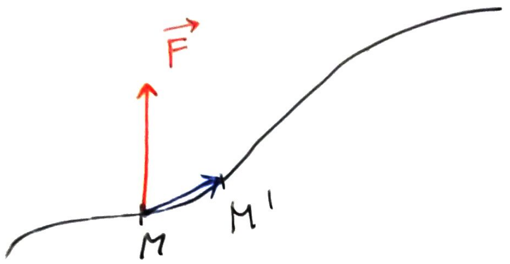
Approche cinématique du mouvement d'un point

I Travail d'une force

Une force peut modifier le vect. vitesse (dir, sens, norme)

C'est ce que caractérise le travail

1 Définition



$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{\ell}$

<u>def</u> Travail élémentaire de $\vec{F}$

$$\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}}$$

$[\delta W] = J = Nm$

<u>remq</u>

$\delta \cdots$ est une infime quantité

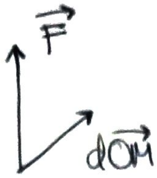
$d \cdots$ ——— variation

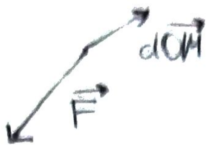
<u>remq</u>

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \vec{v} \cdot dt}$$

dépend du référentiel, δW aussi !

remq





$\delta W > 0$ travail moteur

$\delta W < 0$ travail résistant

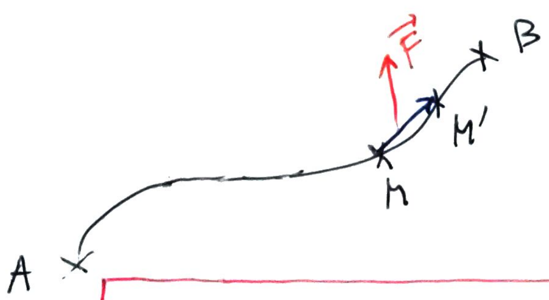
ex force de frottements fluides

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \vec{f} \cdot \vec{v}\, dt$$
$$= -\alpha \vec{v} \cdot \vec{v}\, dt$$
$$= -\alpha v^2\, dt$$
$$< 0$$

$\vec{f}$ crée un travail résistant

ex travail d'une force entre deux points



$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W \, dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}}$$

2 Travail d'une force constante

$$\dot{\vec F} = \vec 0$$

$$W_{AB}(\vec F) = \int_A^B \vec F \, d\vec{OM}$$

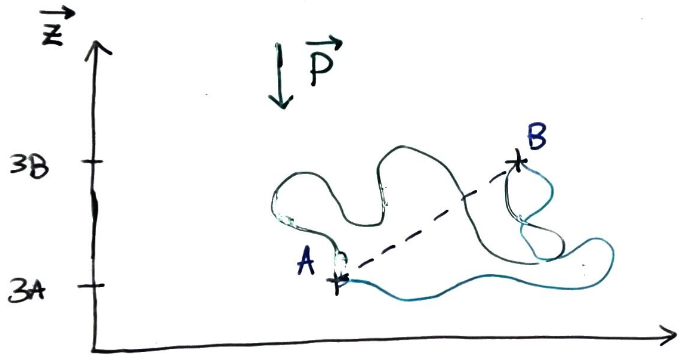
$$= \vec F \underbrace{\int_A^B d\vec{OM}}_{\vec{AB}}$$

$$\vec{AB} \quad : \quad [\vec{OM}]_A^B = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\boxed{W_{AB}(\vec F) = \vec F \cdot \vec{AB}}$$

⚠ si $\vec F = \vec{const}$

ex le poids



$A := (x_A ; y_A ; z_A)$
$B := (x_B ; y_B ; z_B)$

$$\vec P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$W_{AB}(\vec P) = \vec P \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A)$$

$$= mg(z_A - z_B)$$

⚠ Si (Oz) est la verticale ascendante

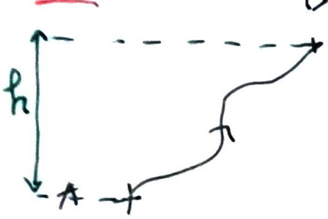
remq

Le travail du poids est indépendant du trajet suivi

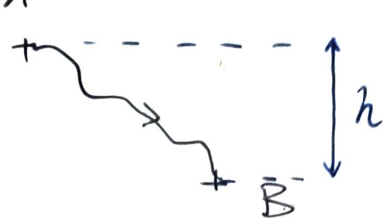
remq

Il ne dépend que du dénivelé (– entre pt dép/arrivée)

thm Caractérisation dénivelaire du travail



$\underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = -mgh$



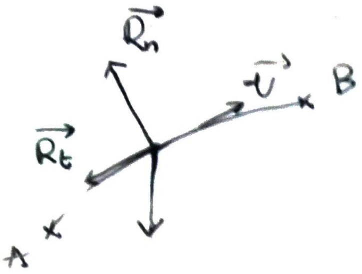
$\underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = +mgh$

$$\boxed{\underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = \pm mgh}$$

$$(Oz) \uparrow^{z}_{O} \Rightarrow \underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$$

ERRATUM:

@ Dynamique / Frott. / Disj cas : add lois de Coulomb <Content>



$$W_{AB}(\vec{R}) = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{OM}$$

$$= \int_A^B (\underbrace{\vec{R_n}} + \vec{R_t})\, \underbrace{d\vec{OM}}$$

$\vec{R_n} \perp d\vec{OM}$

$$\boxed{W(\vec{R_n}) = 0}$$

La Réac norm. ne travaille pas

$$W_{A \to B}(\vec{R}) = \int_A^B \vec{R_t} \cdot d\vec{OM}$$

$$= \int_A^B -\vec{R_t} \cdot d\vec{OM} \ \ldots ?$$

$$< 0$$

$\Rightarrow$ travail résistant

4 Puissance d'une force.

<u>def</u>

Travail de la force par unité de temps

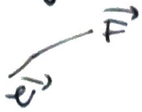
$$P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{OM}}$$

$$\boxed{P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

<u>remq</u> Unités

$$[P] = W = N m s^{-1} = J s^{-1}$$

remq $\mathcal{P}(\vec F) > 0 \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$ puissance motrice

$\mathcal{P}(\vec F) < 0 \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$ puissance résistante

remq

$\mathcal{P}(\vec F)$ dépend du référentiel

II Théorème de l'énergie cinétique

1 Énergie cinétique

def Énergie cinétique d'un point M de vitesse $v(M/\mathcal{R})$ dans $\mathcal{R}$

$$\boxed{\underbrace{E_c}_{J}(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\underbrace{m}_{kg}\underbrace{v}_{m\,s^{-1}}{}^2(M/\mathcal{R})}$$

2 Théorème de la puissance cinétique TPC

thm Si $\mathcal{R}$ est Galiléen :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec F) = \frac{d}{dt}E_c(M/\mathcal{R})}$$

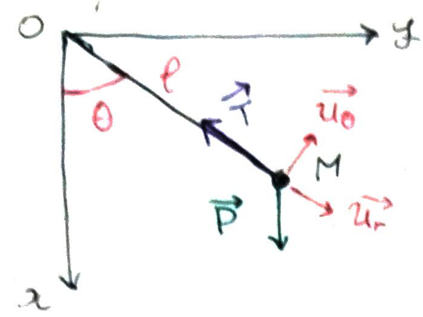
dem Dans un réf. Galiléen

2e loi N : $m\vec a = \vec F$

$\Leftrightarrow \vec v \cdot m\dot{\vec v} = \vec F \cdot \vec v$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec v\cdot\vec v\right) = \mathcal{P}(\vec F)$

app pendule



Syst : {M}

Réf : Labo galiléen

Forces :

$\vec P =$

$\vec T =$

D'après le TDC :

$$\dot{E_c} = \mathcal{P}(\vec F) = \mathcal{P}(\vec T) + \mathcal{P}(\vec P)$$

où :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

or :

$$\vec{OM} = \ell \vec{u_r}$$

$$\vec v = \ell \dot\theta \vec{u_\theta}$$

d'où :

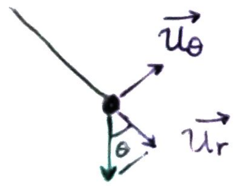
$$E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta^2 \underbrace{1}_{\vec{u_\theta}^2}$$

ainsi :

$$\mathcal{P}(\vec T) = \vec T \cdot \vec v = \vec 0 \Leftarrow \vec T \perp \vec v \Leftarrow \begin{cases} \vec T \,//\, \vec{u_r} \\ \vec v \,//\, \vec{u_\theta} \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(\vec P) = \vec P \cdot \vec v = (mg\cos\theta \, \vec{u_r} - mg\sin\theta \, \vec{u_\theta}) \cdot \ell\dot\theta \vec{u_\theta}$$

$$= -mg\ell\dot\theta\sin\theta$$



enfin :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta^2\right) = 0 - mg\ell\dot\theta\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} \ell^{\cancel{2}} \cancel{2} \dot\theta\ddot\theta = -\cancel{m} g \cancel{\ell} \dot\theta \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

rem Pk plus qu'une équation ?
Le produit scalaire caché dans le TPC nous fait disparaître la projection selon $\vec{u_r}$

3 Théorème de l'énergie cinétique

thm

Si $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\underbrace{\Delta_{i\to f} E_c}_{\text{dépend que du pt départ (i) et arrivée (f)}} = \underbrace{W_{i\to f}(\vec{F})}_{\text{peut dépendre du chemin suivi}}$$

notn Variation macroscopique

$$\Delta_{A\to B} f = f(B) - f(A)$$

dem

Soit $\mathcal{R}$ un ref. Galil.

D'après le TPC :

$$\dot{E_c} = \mathcal{P}(\vec{F})$$

$$\Leftrightarrow dE_c = \mathcal{P}(\vec{F})\,dt = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$= \vec{F}\,d\vec{OM}$$

$$= \delta W(\vec{F})$$

$$= \delta W(\vec{F})$$

Entre A et B :

$$\int_A^B dE_c = \int_A^B \delta W(\vec{F})$$

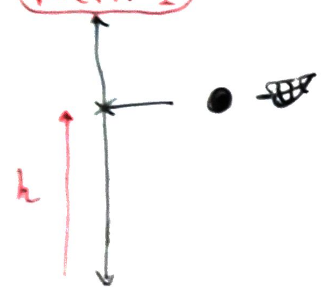
$$\Leftrightarrow \underset{i}{E_{c_B}} - \underset{f}{E_{c_A}} = \underset{\underset{i\ \ f}{A\to B}}{W}(\vec{F})$$

$$\underset{\underset{i\ \ f}{A\to B}}{\Delta E_c} := \underset{i}{E_{c_B}} - \underset{f}{E_{c_A}} = \underset{\underset{i\ \ f}{A\to B}}{W}(\vec{F})$$

rem q	variation...		quantité...
élémentaire	dE_c	$=$	δW
macroscopique	ΔE_c	$=$	W

ex Vidéo BBC : vitesse de chute d'une plume & boulet à l'arrivée

Meth 1



$\downarrow \vec{g}$

$$\ddot{z} = -g$$

$$\Leftrightarrow \dot{z} = -gt + \cancel{\text{const}}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + \text{const}$$

$$= -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

À l'arrivée : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\dot{z} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$ vitesse à l'arrivée

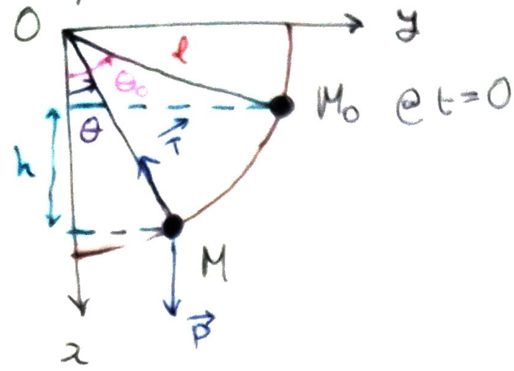
$\Rightarrow$ TRUV

Meth 2 En appliquant le TEC

$$\underset{i\to f}{\Delta E_c} = E_{c_f} - \underbrace{\cancel{E_{c_i}}}_{\Uparrow\ v_i = 0} = +mgh \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

$$\Leftrightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

ex pendule



Syst, Ref, Forces $\{\vec P, \vec T\}$.

TEC :

$$\Delta E_{c\,M_0\to M} = W_{M_0\to M}(\vec P) + W_{M_0\to M}(\vec T)$$

$\vec T \perp \vec v$ // dépl. élem

$\Rightarrow \vec T \perp$ dépl élem

$\Rightarrow W_{M_0\to M}(\vec T) = 0$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} = + mgh$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mg(\ell\cos\theta - \ell\cos\theta_0)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

remq

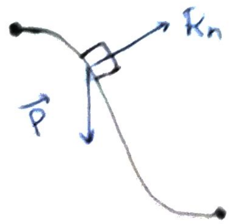
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta^2$$

$$= mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m \ell^2 2\dot\theta\ddot\theta = - mg\ell \sin\theta\,\dot\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

ex ~~shambhala~~ @ PortAventura



$\Delta E_c = W(\vec P) + W(\vec R)$

$\frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = mgh$

$v_f = \sqrt{2gh}$

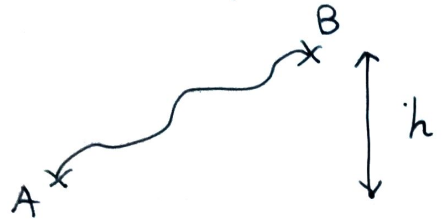
$= 40\ m\,s^{-1}$

$= 141\ km\,h^{-1}$

III Énergie potentielle

1 Notion d'énergie potentielle

On élève un point M de A vers B d'une hauteur h



$\begin{cases} \text{On} \\ \text{"l'opérateur"} \end{cases}$ doit fournir le travail $W_{op} = -W_{A\to B}(\vec{P}) = -(-mgh) = mgh$

Cette énergie est stockée par le point M qui la met en réserve sous forme d'une énergie potentiellement disponible appelée énergie potentielle

$$W_{op} = \Delta_{A\to B} E_p$$

2 Force conservative

def Force à travail entre deux points A et B indépendant du chemin suivi. Il existe alors une énergie appelée "énergie potentielle" telle que

$$\boxed{\Delta E_p = -W_{A\to B}(\vec{F})}$$

De manière $\begin{cases} \text{infinitésimale} \\ \text{élémentaire} \end{cases}$

$$dE_p = -\delta W(\vec{F})$$

Cas particulier $\vec{F} = \underbrace{F(x)}_{\text{projection}} \vec{u_x}$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$= F(x)\, \vec{u_x} \cdot (dx\, \vec{u_x} + dy\, \vec{u_y} + dz\, \vec{u_z})$$

$$= F(x)\, dx$$

$$= -dE_p$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Pour une force conservative :

- $W(\vec{F})$ est indépendante du chemin suivi
- $\exists\, E_p \ / \ \begin{cases} W(\vec{F}) = -\Delta E_p \\ \delta W = -dE_p \end{cases}$
- $\vec{F} = F(x) dx \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx}}$

$\vec{F}$ dérive d'une énergie

3 Exemples

- Poids $\underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$

$$= -\underset{A \to B}{\Delta E_p}$$

$$= -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$$

$$= E_p(A) - E_p(B)$$

$$\boxed{E_{p_p} = mgz + \text{const}}$$

- Force de rappel élastique $\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{u_x}$ où $x = \ell(t)$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$
$$= \begin{pmatrix} -k(x-\ell_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$
$$= -k(x - \ell_0)\, dx$$
$$= -dE_p$$

$$\frac{dE_p}{dx} = k(x - \ell_0)$$

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{const}}$$

3 Forces non-conservatives ou dissipatives

def Force qui ne dérive pas d'une énergie leur travail dépend du chemin suivi.

IV Énergie mécanique

def

$E_m = E_c + E_p$ $\quad [E_m] = J$

Toujours définie, comme E_p, à une constante près

thm Thm de l'Énergie Mécanique

En référentiel Galiléen.

$$\Delta E_m = W(\vec{F_{nc}})$$

dem

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p)$$
$$= \Delta E_c + \Delta E_p$$

On suppose un ref Galiléen

$$\Delta E_c = W(\vec{F})$$
$$= W(\vec{F_c}) + W(\vec{F_{nc}})$$

$$\Delta E_p = -W(\vec{F_c})$$

$$\Delta E_m = \cancel{W(\vec{F_c})} + W(\vec{F_{nc}}) - \cancel{W(\vec{F_c})}$$
$$= W(\vec{F_{nc}})$$

thm TPM (moins important que TEC)

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F_{nc}})$$

remq

Si un point M est soumis à aucune force non-conservative, ou si elle ne travaille pas,

$$\Delta E_m = 0$$
$$\Leftrightarrow E_m = \text{const}$$
$\Leftrightarrow$ E_m se conserve

$\Leftrightarrow$ M est conservatif

Si M est soumis à des forces non-conservatives/dissipatives

$$\Delta E_m = W(\vec{F_{nc}}) < 0$$
$$\Rightarrow E_m \searrow$$

$\Rightarrow$ Il y a dissipation de l'énergie

V Utilisation du graphe de Ep pour un mouv. à un deg. de liberté

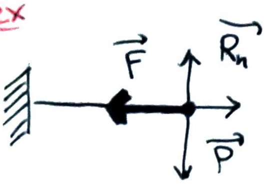
Mouvement de translation unique ou translation unique

La conaissance d'une seule variable (x ou θ) permet de définir parfait-
-ement la position du point M.

Supp M soumis à $\vec{F}$, conservative. Supp $\vec{F} = F(x)\vec{u_x}$

$$\exists \, E_p \, / \, F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

ex



Soit x_e une position d'équilibre.

2^e loi de N $\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}$

$\Rightarrow ma(x) = F(x)$ projection sur x

En x_e:

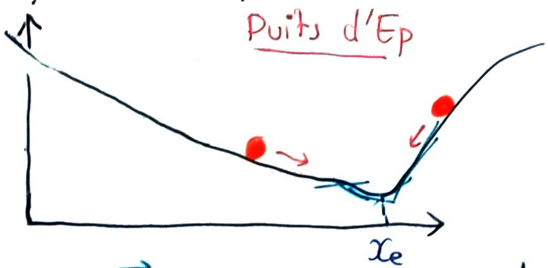
$$a(x_e) = 0 = F(x_e)$$

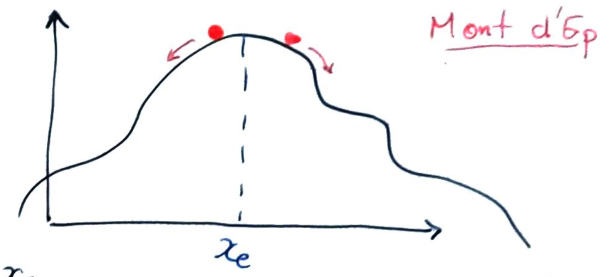
$$\Leftrightarrow -\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$$

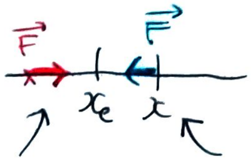
$$\Leftrightarrow \frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$$

$\Rightarrow$ x_e est un extrémum pour la courbe $E_p(x)$

Se pose la question la stabilité/instabilité de la position d'éq



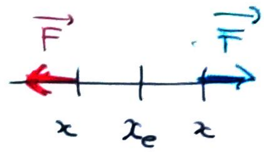




Au voisinage x_e

$$F(x) = \cancel{F(x_e)} + (x - x_e)\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x_e}$$

$$= -(x - x_e)\left(\frac{d^2E_p}{dt^2}\right)_{x_e}$$



$F(x) > 0 \begin{cases} x - x_e > 0 \\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - x_e < 0 \\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} > 0 \end{cases} F(x) > 0$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{EQ STABLE}} \Leftrightarrow \min$

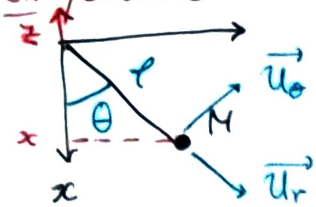
$x - x_e < 0$ $x - x_e > 0$

$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} < 0$

$\Updownarrow$

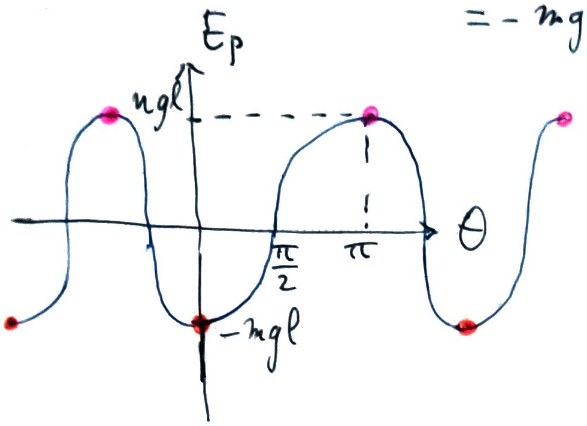
$\boxed{\text{EQ INSTABLE}} \Leftrightarrow \max$

ex pendule



Énergie potentielle de pesanteur

$$E_p = + mgz + \text{const}$$
$$= - mgx + \text{const}$$
$$= - mg\ell\cos\theta + \text{const}$$



Eq instables minima = puits

Eq stables maxima = mont