Variables aléatoires finies

L'idée : plutôt que de modéliser une expérience aléatoire par un espace probabilisé trop grossier, on *postule* qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ le modélise finement et on considère une application $X : \Omega \to E$ où E correspond aux évéments observables ou qui nous intéressent.

Exemple 1 On lance un dé de 6 non pipé. Modéliser cette expérience aléatoire en posant $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ oblige à identifier des situations très différentes, et est abusif car un résultat de l'expérience n'est pas un nombre. On peut aussi postuler l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ modélisant finement cette expérience et considérer l'application

$$X : \left\{ \begin{array}{lll} \Omega & \to & \{1, 2, \ldots, 6\} \\ \omega & \mapsto & \text{le nombre lu sur la face supérieure du dé lorsque } \omega \text{ est réalisée.} \end{array} \right.$$

Exemple 2 On lance deux dés de 6 non pipés. Quelle que soit la modélisation choisie pour cette expérience aléatoire, on peut souhaiter ne s'intéresser qu'à la somme des deux valeurs obtenues (par exemple parce qu'on joue à un jeu dont le gagnant est celui qui réalise la plus grande somme). On s'intéresse alors naturellement à l'application

$$X : \left\{ \begin{array}{lll} \Omega & \to & \{2, 3, \ldots, 12\} \\ \omega & \mapsto & \text{la somme des résultats des dés lorsque } \omega \text{ est réalisée.} \end{array} \right.$$

Les valeurs prises par X **correspondent aux évéments qui nous intéressent**.
En particulier les événements $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = i\}$, où i parcourt les valeurs prises par X :

- auraient pu former l'ensemble Ω si on avait voulu modéliser très grossièrement (mais beurk !) ;
- forment un système complet d'événements (est-ce qu'on sait encore ce que c'est ?).

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé, et E désigne un ensemble.

I Variables aléatoires

I.1 Définition et autres exemples

Définition 1 : Variable aléatoire.

1. On appelle variable aléatoire (si grosse paresse : v.a.) une application $X : \Omega \to E$.
2. Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle, dans toute la suite v.a.r.
3. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ pour un entier n, on dit que X est un vecteur aléatoire, dans la suite $\overrightarrow{\text{v.a.}}$.

I.2 Terminologie et notations

Notation 1 Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire, on notera :

- $(X = x)$ l'événement $X^{-1}\big(\{x\}\big)$, pour $x \in E$;
- $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}\big(A\big)$, pour $A \subset E$.

Si de plus X est une v.a.r. (*i. e.* si on a $E \subset \mathbb{R}$), on notera :

- $(X \leqslant x)$ l'événement $X^{-1}\big(]-\infty, x]\big)$;
- $(X < x)$ l'événement $X^{-1}\big(]-\infty, x[\big)$;
- $(X \geqslant x)$ l'événement $X^{-1}\big([x, \infty[\big)$;
- $(X > x)$ l'événement $X^{-1}\big(]x, +\infty[\big)$.

Remarque 1

La famille des $(X=x)_{x\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements. **Notation 2** Si F est un ensemble et $f : E \to F$ est une application, on pourra noter $f(X)$ la variable aléatoire $f\circ X$. En effet, ces gens (les probabilistes) sont des barbares.

I.3 Loi d'une variable aléatoire réelle

Définition 2 : Loi.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On appelle <u>loi de X</u> l'application $P_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X\in A) \end{array} \right.$

Remarque 2

On identifiera fréquemment P_X avec son prolongement naturel à $\mathcal{P}(E)$, parfois plus pratique à décrire :

$$P_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X\in A) \end{array} \right. .$$

Théorème 1 .

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.

Alors $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1]$ est une probabilité.

Bien sûr, de même, $P_X : \mathcal{P}(E) \to [0,1]$ est une probabilité.

II Lois usuelles

II.1 Loi uniforme finie

Définition 3 .

On dit que X suit la loi uniforme sur E et on note $X \sim \mathcal{U}(E)$ lorsqu'on a $P_X = P_u$ (sur E), i. e. lorsqu'on a $\forall x\in E,\ P(X=x) = \dfrac{1}{|E|}$. Si $E=\{a, a+1, \dots, b\}$ on note $X\sim\mathcal{U}(a;b)$.

II.2 Loi de Bernoulli

Définition 4 .

Soit $p\in[0,1]$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X\sim\mathcal{B}(p)$ lorsqu'on a $X(\Omega)\subset\{0,1\}$ et $P(X=1)=p$, donc $P(X=0)=1-p=q$.

Théorème 2 .

Une v.a.r. suit une loi de Bernoulli si et seulement si c'est une fonction indicatrice.
Autrement dit : $\Big(\exists p\in[0,1],\ X\sim\mathcal{B}(p)\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists A\in\mathcal{P}(\Omega),\ X=\mathbb{1}_A\Big)$.

II.3 Loi binomiale

Définition 5 .

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[0,1]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ lorsqu'on a $X(\Omega)\subset\{0,1,\dots,n\}$ et $\forall k\in\{0,\dots,n\},\ P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ où bien sûr $q=1-p$.

II.4 Exercice classique : décrire la loi d'une v.a.r. donnée

III Espérance. Variance.

III.1 Espérance

Définition 6 : Espérance.

On appelle <u>espérance de X</u> le nombre $E(X) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\,x$.

Théorème 3 : Propriétés de l'espérance.

1. On a : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.
2. L'espérance est :
   — linéaire : $\forall X, Y : \Omega \to \mathbb{R},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2,\ E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$;
   — positive : $\forall X : \Omega \to \mathbb{R},\ X \geqslant 0 \Rightarrow E(X) \geqslant 0$;
   — croissante : $\forall X, Y : \Omega \to \mathbb{R},\ X \leqslant Y \Rightarrow E(X) \leqslant E(Y)$.
3. Si X est constante, i. e. il existe m tel que $X(\Omega) = \{m\}$, alors $E(X) = m$.

III.2 Variance

Définition 7 : Variance.

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$.

Remarque 3

On met un carré car :

— ça permet d'augmenter les gros écarts et diminuer les petits écarts (erreurs de mesure, e.g.)

— ça devient presque un produit skyler

Remarque 4

Par positivité de l'espérance, on a toujours $V(X) \geqslant 0$. Ceci permet de définir l'écart-type de X $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Terminologie : lorsqu'on a $V(X) = 1$ (*i. e.* $\sigma(X) = 1$), on dit que X est réduite.

Exemple 3 Déterminons la variance de la variable aléatoire de l'exemple ??. On reprend $X : \begin{cases} \Omega & \to \{1, \dots, 6\} \\ \omega & \mapsto \text{la valeur du dé} \end{cases}$

Remarque 5

C'est un cas particulier de la loi uniforme

Théorème 4 : Propriétés de la variance.

1. Formule de Kœnig : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
3. Si X est constante, alors $V(X) = 0$.

III.3 Théorème de transfert

Théorème 5 : Formule de transfert.

Soit $Z : \Omega \to E$ une variable aléatoire (non nécessairement réelle) et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors :

$$E(f(Z)) = \sum_{z \in Z(\Omega)} f(z) P(Z = z)$$

III.4 Deux inégalités fondamentales

Théorème 6 : Inégalité de Markov.

Supposons X **positive**. Soit $\alpha > 0$. Alors $P(X \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{E(X)}{\alpha}$.

Théorème 7 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

III.5 Espérance et variance des lois usuelles

Remarque 6

Si $X \sim \mathcal{U}(a;b)$, l'espérance et la variance de X ne sont pas explicitement au programme ; mais on les verra en TD.

$$X(\Omega) \subset \{0,1\} \qquad \begin{cases} P(X=0) & = 1-p = q \\ P(X=1) & = p \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)x = 0q + 1p = p$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ or $X^2 = X$ donc $V(X) = E(X) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Théorème 8 : Cas d'une loi de Bernoulli.

On suppose $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour un certain $p \in [0,1]$ (on note $q = 1-p$). Alors :

$$X(\Omega) \subset \{0, \ldots, n\}$$
$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Théorème 9 : Cas d'une loi Binomiale.

On suppose $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour un certain $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$ (on note $q = 1-p$). Alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

IV Indépendance

IV.1 Indépendance de deux variables aléatoires

Théorème 10 .

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires indépendantes, et $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$ deux applications. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

IV.2 Indépendance, espérance et variance

Théorème 11 .

Soient X et Y deux v.a.r. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Corollaire 1 .

Soient X et Y deux v.a.r. Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Théorème 12 .

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes deux à deux, alors $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

IV.3 Indépendance mutuelle

Théorème 13 .

Soient $p \in [0,1]$ et X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** telles que $\forall i,\ X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

V Vecteurs aléatoires

V.1 Exemples

Remarque 7

"Théorème de Nil Venet" : quitte à considérer que Ω modélise la réalisation de toutes les expériences aléatoires possibles et imaginables, on peut toujours considérer que deux variables aléatoires quelconques sont définies sur le même univers Ω.

V.2 Lois associées à un vecteur aléatoire

Définition 8 .

Soit $Z = \binom{X}{Y}$ un couple aléatoire.

- On appelle loi conjointe de X et Y la loi de Z.
- On appelle lois marginales de Z les lois de X et Y.

Remarque 8

1. Le tableau donne seulement les $P(Z = (x, y))$ mais d'après .... cela suffit.
2. Le tableau de la loi conjointe illustre qu'en général on a seulement $(X, Y)(\Omega)$ ..... $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
3. Une fois obtenu le tableau de la loi conjointe, on en déduit les lois marginales en ....
4. Cet exemple en particulier illustre que ....
5. **Cependant**, ...

Définition 9 .

Soit $Z = \binom{X}{Y}$ et $A \in X(\Omega)$. On appelle loi de Y conditionnellement à $X \in A$ (ou loi de Y sachant $X \in A$) l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y(\Omega)) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P_{X\in A}(Y \in B) \end{array} \right.$.

V.3 Covariance

Définition 10 .

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire. On appelle covariance de X et Y le réel $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

Théorème 14 : Kœnig-Huygens.

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire. Alors $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Théorème 15 .

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire. Si X et Y sont indépendantes alors ....

Remarque 9

La réciproque est fausse **et on l'a déjà vu** !

En effet :

Théorème 16 .

La covariance est une forme bilinéaire, symétrique, et positive (seulement).

Corollaire 2 : Cauchy-Schwarz.

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire. Alors $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Théorème 17 .

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des var sur Ω. $V(X_1 + \cdots + X_n) =$ ....

V.4 Indépendance vs décorrélation

Définition 11 .

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire. On appelle coefficient de corrélation de X et Y le réel $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Définition 12 .

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire. On dit que X et Y sont décorrélées lorsqu'on a $\rho_{X,Y} = 0$, i. e. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Lemme 1 .

Soit X une v.a.r. finie. On a $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ constante.

Corollaire 3 .

Soit $\binom{X}{Y}$ un couple aléatoire avec X non constante. On a $\left|\rho_{X,Y}\right| = 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ Y = aX + b$.

\end exemple \end document