EXM BARALEAT

$\boxed{5/1}$

X est le nombre de boules bien rangées

$\boxed{5/2}$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, cherchons $E(X_i)$

On a $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ car

- $X_i(\Omega) \subset \{0, 1\}$
- $P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$ car Meth 1 la boule i peut être rangée dans n boîtes différentes, et doit être rangée dans une seule boîte (la i^e)

Meth 2 Chaque permutation boule $\mapsto$ boîte est équiprobable

$$P(X=1) = \frac{|\{\sigma \in S_n, \sigma(i) = i\}|}{|S_n|}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

⚠ Les X_i ne sont pas mutuellement indépendants

$$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \cdots \cap X_{n-1} = 1 \cap X_n = 0) = 0$$

$$\neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\cdots P(X_{n-1} = 1)P(X_n = 0) \neq \frac{1}{n^{n-1}} \times \frac{n-1}{n}$$

Donc a priori $X \not\sim \mathcal{B}(n, p)$

$$E(X_i) = \frac{1}{n} \quad (\forall i)$$

D'où

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1$$

$\boxed{5/3}$

À retenir

On n'est pas obligé de connaître X pour calculer $E(X)$.

eg

- linéarité de E
- formule de transfert