2/1

$ wget https://media.ewen.works/mps/math/variables-aleatoires/exercice_2.py

$ python exercice_2.py

$\leq n/3$ est plus probable

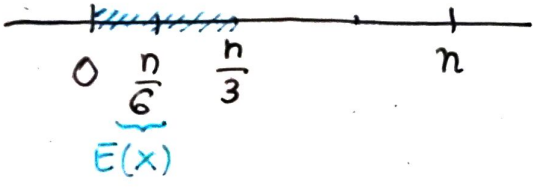
2/2 Markov avec $\alpha = \frac{n}{4}$:

$$P(X \geq \tfrac{n}{4}) \leq \frac{4E(X)}{n} = \frac{4n\frac{1}{6}}{n} = \frac{2}{3} \quad \text{car } X \sim \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{6})$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ainsi $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$



On prend $\varepsilon = \frac{n}{6}$. $P(|X - E(X)| < \frac{n}{6}) \geq 1 - \frac{V(X)}{(\frac{n}{6})^2}$

$E(X) = \frac{n}{6}$; $V(X) = npq = \frac{n}{6}\frac{5}{6}$

donc $P(|X - \frac{n}{6}| < \frac{n}{6}) \geq 1 - \frac{5n}{6^2}\frac{6^2}{n^2} = 1 - \frac{5}{n}$

$$P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right| \leq \frac{n}{6}\right) > P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right| < \frac{n}{6}\right)$$

$$\geqslant 1-\frac{5}{n}$$

$$= P\left(X \leq \frac{n}{3}\right) \geqslant 1-\frac{5}{n}$$

Pour $n = 30$, $\begin{cases} P\left(X \geqslant \frac{n}{4}\right) \leq \frac{2}{3} \\ P\left(X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant \frac{5}{6} > \frac{2}{3} \end{cases}$

2/3 En général:

$$\frac{2}{3} \leq 1-\frac{5}{n} \quad \text{ie} \quad \frac{5}{n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{ie} \quad n \geqslant 15$$

Pour $n \geqslant 15$, Bienaimé-Tchebytchev & Markov suffisent pour calculer $P\left(X \leq \frac{n}{3}\right) \geqslant P\left(X \geqslant \frac{n}{4}\right)$

Pour $n \in [\![1, 15]\!]$, on calcule (avec Python)

$$P\left(X \leq \frac{n}{3}\right) = \sum_{k \leq \frac{n}{3}} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

$$P\left(X \geqslant \frac{n}{4}\right) = \sum_{k \geqslant \frac{n}{4}} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

```
def comparaison(n):
    return (
        sum( comb(n, k) * (1/6)**k * (5/6)**(n-k) for k in ...
        ...
```