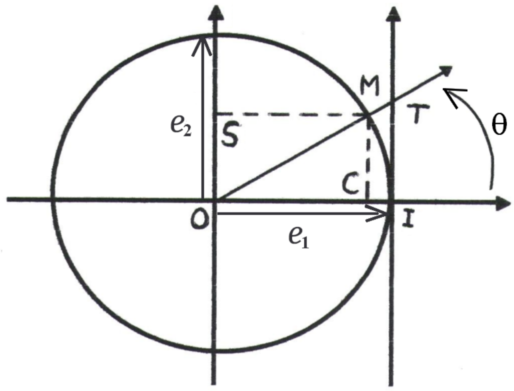
# Trigonométrie

Quelques formules trigonométriques.

| $x$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\tan(x)$ | $\text{cotan}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\times$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | $\times$ | $0$ |




## Définition

Si on a $\theta = (e_1, \overrightarrow{OM})$ et que $x$ est une mesure de $\theta$, on a :

$\cos(x) = \cos(\theta) = \overline{OC}$ (abscisse de $M$) ; $\sin(x) = \sin(\theta) = \overline{OS}$ (ordonnée de $M$) ; $\tan(x) = \tan(\theta) = \overline{IT}$ (ordonnée de $T$)

## Symétries

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tour complet : | $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ ; | $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ | |
| Symétrie / (Ox) : | $\cos(-x) = \cos(x)$ ; | $\sin(-x) = -\sin(x)$ ; | $\tan(-x) = -\tan(x)$ |
| Symétrie / (Oy) : | $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ ; | $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ ; | $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ |
| Symétrie / O : | $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ ; | $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ ; | $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ |
| Symétrie / $\Delta$ : | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ ; | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ ; | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}(x)$ |
| Quart de tour : | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ ; | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ ; | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cotan}(x)$ |

## Pythagore

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad ; \quad \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \quad ; \quad \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \text{cotan}^2(x)$$

## Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\,; \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\,; \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}\,; \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

## Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad ;$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x) \quad ; \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad ; \qquad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

## Formules de transformation

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

## Formules d'arc moitié

Si $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est défini, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ; $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ; $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ (pour $t \neq \pm 1$)

## Trigonométrie et nombres complexes

Exponentielle imaginaire : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$

Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

Formule de Moivre : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$

## Fonctions trigonométriques réciproques

$\begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ ; $\begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$ ; $\begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases}$

## Dérivées

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$ $\forall x \in \mathrm{D}_{\tan},\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x)$

$\forall x \in ]-1,1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in ]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

## Équations trigonométriques

$\cos(x) = \cos(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = x_0 + 2k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}, x = -x_0 + 2k\pi$

$\sin(x) = \sin(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = x_0 + 2k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi - x_0 + 2k\pi$

$\tan(x) = \tan(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = x_0 + k\pi$