EX M TACMAS 3

$\boxed{\text{Rang 4}}$

$$\mathcal{F} := \left(\sqrt{\ }, \ln, \frac{\cos}{\mathrm{id}}, \mathrm{id}^{\mathrm{id}}, \mathrm{th}\right)$$

Considérons une CL nulle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \lambda_1 \sqrt{x} + \lambda_2 \ln x + \lambda_3 \frac{\cos x}{x} + \lambda_4 x^x + \lambda_5 \mathrm{th}\, x = 0$$

$$\text{ie } \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \lambda_1 \frac{1}{x^{x-\frac{1}{2}}} + \lambda_2 \frac{\ln x}{x^x} + \lambda_3 \frac{\cos x}{x^{x+1}} + \lambda_4 + \lambda_5 \frac{\mathrm{th}\, x}{x^x} = 0$$

Soit $x \overset{\text{def}}{\longrightarrow} +\infty$

- $x^{x-\frac{1}{2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \Longrightarrow \dfrac{1}{x^{x-\frac{1}{2}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

- $\dfrac{\ln x}{x^x} \leq \dfrac{\ln x}{x} \longrightarrow 0$ donc par TdG $\dfrac{\ln x}{x^x} \longrightarrow 0$

- $\dfrac{\cos x}{x^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par TdG

- $\dfrac{\mathrm{th}\, x}{x^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (pas une FI)

Donc en passant à la limite dans $(*)$:

$$\boxed{\lambda_4 = 0}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda_1\sqrt{x} + \lambda_2 \ln x + \lambda_3 \frac{\cos x}{x} + \lambda_5 \operatorname{th} x = 0$$

i.e. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} + \lambda_3 \underbrace{\frac{\cos x}{x^{3/2}}} + \lambda_5 \underbrace{\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{x}}} = 0$

Pour $x \longrightarrow +\infty$: $\boxed{\lambda_1 = 0}$ par CC, TdG et PAL.

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda_2 \ln x + \lambda_3 \frac{\cos x}{x} + \lambda_5 \operatorname{th} x = 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \lambda_2 + \lambda_3 \underbrace{\frac{\cos x}{x \ln x}} + \lambda_5 \underbrace{\frac{\operatorname{th} x}{\ln x}} = 0$

Pour $x \longrightarrow +\infty$: $\boxed{\lambda_2 = 0}$ par TdG et PAL

Donc

$$\lambda_3 \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0} + \lambda_5 \underbrace{\operatorname{th} x}_{\xrightarrow[+\infty]{} 1} = 0$$

donc $\boxed{\lambda_5 = 0}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda_3 \frac{\cos x}{x} = 0$$

$$x = 2\pi \Rightarrow \frac{\lambda_3}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_3 = 0}$$

donc $\mathcal{F}_1$ libre

donc $\operatorname{rg} \mathcal{F}_1 = \operatorname{card} \mathcal{F}_1 = 5$

Anal 3

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)} \exp^{(n-k)} = 0$$

Leibniz ? $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \underbrace{g^{(n-k)}}_{\exp} = (fg)^{(n)}$

$$\Leftrightarrow (y \exp)^{(n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow y \exp \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{id}]$$

$$\Leftrightarrow y \in \text{solutions}$$

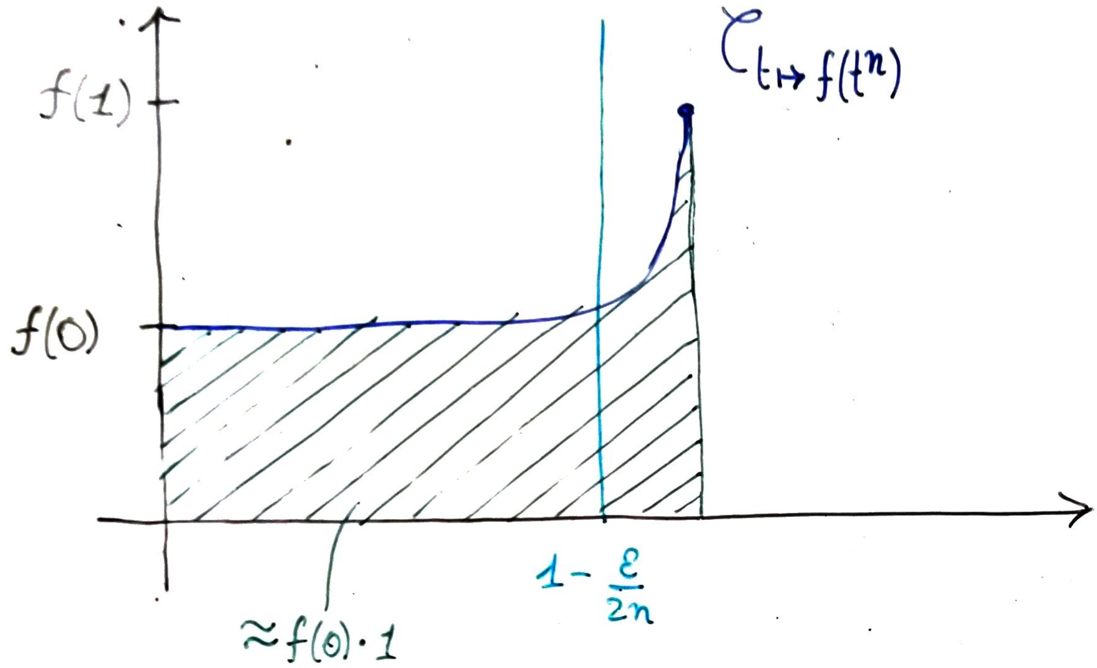
$$= \frac{\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{id}]}{\exp}$$

$$= \left\{ x \mapsto P(x) e^{-x},\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}$$

$\boxed{\text{Anal 5}}$ $f(t^n)$ pour $t \in [0, 1]$

pour $n \ggg 1$, $\begin{cases} t^n \approx 0 & \text{pour } t \in [0, 1[\\ t^n = 1 & \text{pour } t = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f(0) \in \mathbb{R} \\ f(1) \in \mathbb{R} \end{cases}$



Conjecture $\int_0^1 f(t^n) \longrightarrow f(0)$

$g := f - f(0)$ ainsi $\begin{cases} g(t^n) = f(t^n) - f(0) \\ g(0) = 0 \end{cases}$

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \left(g(t^n) + g(0) \right) dt = \int_0^1 g(t^n)\, dt + f(0) \text{ par linéarité}$$

Il suffit de montrer que $\int_0^1 g \longrightarrow 0 = g(0)$

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g \in \mathcal{C}([0,1]) \end{cases}$$

Mq $\displaystyle\int_0^1 g(t^n)\,dt \longrightarrow 0$

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \displaystyle\int_0^1 g(t^n)\,dt \right| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

$|g| \in \mathcal{C}([0,1])$ donc d'après le TBA elle est bornée (et atteint ses bornes)

$M := \sup g$.

On a

$$\left| \int_0^1 g(t^n)\,dt \right| \leq \int_0^1 |g(t^n)|\,dt \quad \text{par IT}$$

$$= \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2M}} |g(t^n)|\,dt + \int_{1-\frac{\varepsilon}{2M}}^1 |g(t^n)|\,dt \quad \text{d'ap. Chasles}$$

$$\leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2M}} |g(t^n)|\,dt + \int_{1-\frac{\varepsilon}{2M}}^1 M\,dt \quad \text{car } \textstyle\int \text{ est } \nearrow$$

$$= \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2M}} |g(t^n)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par continuité de g en 0, $\overset{def}{\exists} \eta$,

$$\forall x \in [0, \eta[, \quad \underbrace{|g(x)|}_{g(x)-g(0)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

(OFLÇNA)

$t^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et, plus précisément

$$\forall t \in [0, 1-\tfrac{\varepsilon}{2M}], \quad 0 \leq t^n \leq \left(1-\frac{\varepsilon}{2M}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq t^n \leq \left(1-\frac{\varepsilon}{2M}\right)^n < \eta$$

Soit $n \geq n_0$

Alors $t^n \in [0, \eta]$ donc d'après $(*)$

$|g(t^n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ donc

$$\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2M}} |g(t^n)|\, dt \leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2M}} \frac{\varepsilon}{2}\, dt \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2}\, dt$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 g(t^n)dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$