Sous-espaces affines.

Exercice 1. *Un plan dans l'espace.*

Dans cet exercice on prend $n = 3$. On considère les points $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe un unique plan affine comprenant A, B et C. Donner son équation cartésienne et un paramétrage.

On peut tricher en utilisant la structure euclidienne...

Exercice 2. *Comme un exo de CCINP mais avec un soupçon d'affine*

Donner en fonction de n l'expression du terme général de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Attention, on établit facilement une relation de récurrence mais seulement à partir d'un certain rang : lequel ?

Exercice 3. *Encore des polynômes réciproques*

On considère un entier naturel n et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On s'intéresse aux parties $\mathcal{R} = \left\{P(X) \in E,\ X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)\right\}$ et $\mathcal{A} = \left\{P(X) \in E,\ X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right) = -P(X)\right\}$.

Pour tout polynôme $Q(X)$, on notera aussi $R_Q = \left\{P(X) \in E,\ X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X) + Q(X)\right\}$.

1. Rappeler pourquoi $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.
2. Justifier que, si R_Q est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E dont on donnera la direction.
3. Donner une CNS sur Q pour que R_Q soit non vide.

Exercice 4.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + f'(x) + f(0) + f'(1) = 1$ est vide ou un sous-espace affine de $\mathcal{D}^1([0,1],\mathbb{R})$.
2. S'il est non vide, donner un repère.

Exercice 5. *Une équation matricielle.*

Dans tout cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 et U est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée.

Résoudre l'équation $M + {}^tM - \mathrm{tr}(M)U = U$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indications : identifier la structure affine du problème et déterminer l'éventuelle direction de l'ensemble des solutions. Les cas $U \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{tr}(U) = 2$ devraient émerger comme étant des cas particuliers à traiter à part.