Sous espaces affines

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Généralités

I.1 Sous-espaces affines

Définition 1 : Translation.
Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a l'application $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + a. \end{array} \right.$

Définition 2 .
Soit $\overrightarrow{W}$ un sev de E et $a \in E$. On appelle sous-espace affine de direction $\overrightarrow{W}$ et passant par a l'ensemble $W = \tau_a(\overrightarrow{W}) = a + \overrightarrow{W} = \left\{ a + w,\ w \in \overrightarrow{W} \right\}$.

Exemple 1 L'exemple-type est le cas de $\mathbb{R}^3$.

- Une droite (au sens TS) est la translation d'une droite vectorielle, c'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.
- Un plan (au sens TS) est la translation d'un plan vectoriel, c'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Exemple de deux plans affines de même direction.

Remarque 1

1. Le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{W}$ est unique. On dit que $\overrightarrow{W}$ est la direction de W.
2. Par contre, l'élément a ne l'est pas. Plus précisément, on a : $\forall b \in W,\ W = b + \overrightarrow{W}$. □

Démonstration. Commençons par remarquer que, si $\overrightarrow{W}$ est un sous-espace vectoriel de E, et si on a $w \in \overrightarrow{W}$, alors on a $w + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}$. En effet toute somme de vecteurs de $\overrightarrow{W}$ est un vecteur de $\overrightarrow{W}$, ce qui montre l'inclusion directe, et toute différence de vecteurs de $\overrightarrow{W}$ est un vecteur de $\overrightarrow{W}$, ce qui montre l'inclusion réciproque.

Démontrons maintenant les deux points évoqués.

1. Soient $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ deux directions de W. Il existe donc $a_1 \in E$ et $a_2 \in E$ tels que $W = a_1 + \overrightarrow{W_1} = a_2 + \overrightarrow{W_2}$. Tout sous-espace vectoriel comprenant 0_E, on a $a_1 = a_1 + 0_E \in a_1 + \overrightarrow{W_1} = a_2 + \overrightarrow{W_2}$, il existe donc $w_2 \in \overrightarrow{W_2}$ tel que $a_1 = a_2 + w_2$. Par suite on a $a_2 + w_2 + \overrightarrow{W_1} = a_2 + \overrightarrow{W_2}$, puis $\overrightarrow{W_2} = w_2 + \overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{W_1}$.
2. Soit $b \in W = a + \overrightarrow{W}$. Il existe donc $w \in \overrightarrow{W}$ tel qu'on ait $b = a + w$. Par suite, on a $b + \overrightarrow{W} = a + w + \overrightarrow{W} = a + \overrightarrow{W} = W$ d'après la remarque préliminaire. □

Exercice 1. Considérons $\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ 2x + y + z = 3 \right\}$. Montrons que c'est un plan affine de $\mathbb{R}^3$, déterminons sa direction et un élément remarquable.

$$
\begin{aligned}
P &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 2x+y+z=3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, z = 3-2x-y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3-2x-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \tau_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \left(\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \} \right) \\
&= \tau_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \left(\mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{Direction}} \right) \right)
\end{aligned}
$$

Exemple 2 Prenons un exemple « pas dans $\mathbb{R}^n$ ».

L'ensemble $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y' = y+1\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions de

$$y'(t) - y(t) = 1$$

donc de la forme $\{t \mapsto y_H(t)+y_p(t), y_H \in \mathcal{S}_H\}$ où $y_p(t) = -1$ est une solution particulière et où $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto K\mathrm{e}^t,\ K \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des solutions homogènes.

Ainsi $\mathcal{S} = \{t \mapsto K\mathrm{e}^t - 1,\ K \in \mathbb{R}\}$.

Autrement dit $\mathcal{S} = \tau_{t \mapsto -1}(\mathcal{S}_H) = \tau_{t\mapsto -1}(\mathrm{Vect}\,(\exp))$.

Terminologie : on appelle :

- point de W un élément de W ;
- vecteur de W un élément de $\overrightarrow{W}$.

L'idée : en tant qu'éléments de E, les éléments de W sont assurément des vecteurs.
Mais en oubliant que E existe et en retenant seulement l'espace W dans lequel on travaille : W n'est pas stable par CL, c'est $\overrightarrow{W}$ qui l'est, et ce sont donc les éléments de $\overrightarrow{W}$ qui méritent de s'appeller vecteurs.

Proposition-Définition 3 .
Soit W un sous-espace affine de E. Soit $(A,B) \in W^2$.

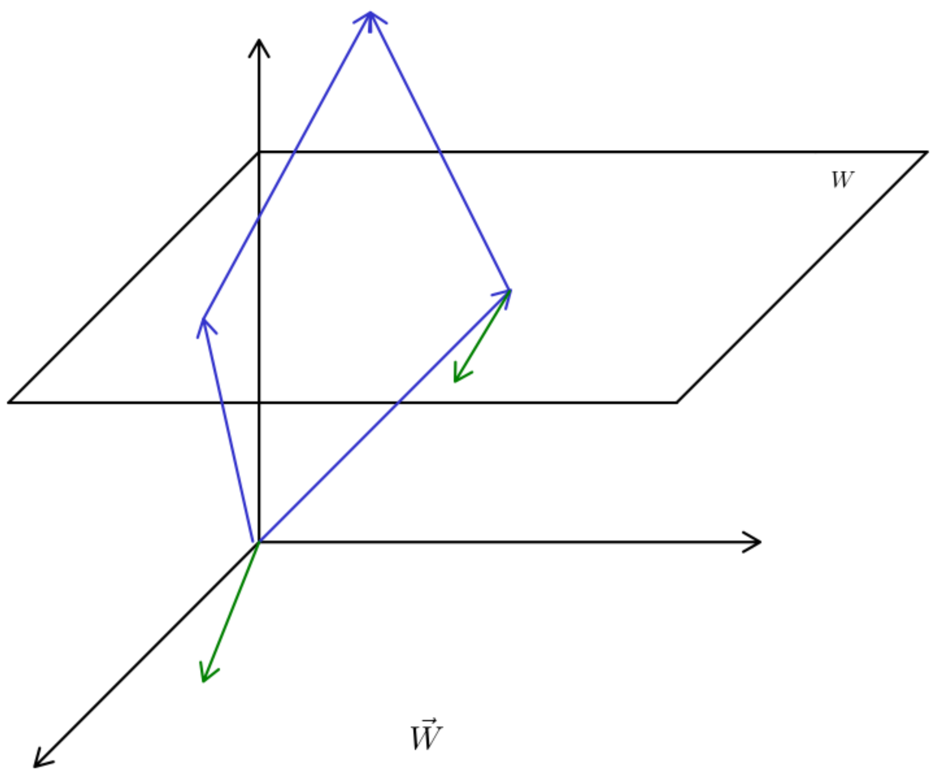
On appelle vecteur d'origine A et d'extrémité B le vecteur $\overrightarrow{AB} = B - A$, et on a $B - A \in \overrightarrow{W}$.

Ceci permet de définir une application $\overrightarrow{\cdot\ \cdot}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} W^2 & \to & \overrightarrow{W} \\ (A,B) & \mapsto & \overrightarrow{AB} \end{array} \right.$.

Démonstration. Soient $A \in W$ et $B \in W$. Il s'agit de montrer qu'on a bien $B - A \in \overrightarrow{W}$. Par définition, il existe $a \in E$ tel que $W = a + \overrightarrow{W}$; il existe donc $w_1 \in \overrightarrow{W}$ et $w_2 \in \overrightarrow{W}$ tels que $A = a + w_1$ et $B = a + w_2$, et par suite on a $B - A = w_2 - w_1 \in \overrightarrow{W}$ puisqu'un sous-espace vectoriel de E est stable par différence. □

Proposition 1 : Structure d'espace affine.
Soit W un sous-espace affine de E. L'opération $\to$ définie de W^2 dans $\overrightarrow{W}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Relation dite "de Chasles" : $\forall (A,B,C) \in W^3,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
2. Bijection points/vecteurs à origine fixée : $\forall \Omega \in W,\ \forall w \in \overrightarrow{W},\ \exists! A \in W,\ \overrightarrow{\Omega A} = w$.



Démonstration. Le formalisme adopté ici rend ce théorème évident.

1. Pour tout $(A, B, C) \in W^3$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}$.
2. Soient $\Omega \in W$ et $w \in \overrightarrow{W}$.
   Pour tout point $A \in W$, on a $\overrightarrow{\Omega A} = w \Leftrightarrow A - \Omega = w \Leftrightarrow A = \Omega + w$.
   D'où, en particulier, l'existence et l'unicité de A.

$\square$

I.2 Propriétés

Définition 4 .

Soit W un sous-espace affine de E. On appelle dimension de W la dimension de $\overrightarrow{W}$, on note $\dim(\overrightarrow{W}) =: \dim(W)$.

Définition 5 .

Soit W un sous-espace affine de E. Soit truc $\in \big\{$droite, plan, hyperplan, $\dots\big\}$.
On dit que W est un truc affine lorsque $\overrightarrow{W}$ est un truc (vectoriel).

Exemple 3 $\{y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y' = y + 1\}$ est une droite affine.

Application 1 Quels sont les sous-espaces affines de $\mathbb{K}^3$?

Les sous-espaces affines de $\mathbb{K}^3$ sont nécessairement de dimension 0, 1, 2 ou 3 donc : les points, droites affines, plans affines et $\mathbb{K}^3$.

Théorème 1 .

Une intersection de sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine.

Démonstration. Soit $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines. Notons $W = \bigcap\limits_{i\in I} W_i$; il s'agit de montrer que, si W est non vide, alors c'est un sous-espace affine. On suppose W non vide : il existe $x_0 \in W$.

- Notons $F = \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{W_i}$. C'est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E.
- On a $x_0 \in W$, autrement dit on a : $\forall i \in I,\ x_0 \in W_i$. On a donc : $\forall i \in I,\ W_i = x_0 + \overrightarrow{W_i}$. Soit $x \in E$. On a :
$$\begin{aligned} x \in W &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in W_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ x - x_0 \in \overrightarrow{W_i} \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in F \\ &\Leftrightarrow x \in x_0 + F \end{aligned}$$
On a finalement $\forall x \in E,\ x \in W \Leftrightarrow x \in x_0 + F$, c'est-à-dire $W = x_0 + F = \tau_{x_0}(F)$, et comme F est un sous-espace vectoriel, W est bien un sous-espace affine.

□

I.3 Repères

Définition 6 .
Soit $W = a + \overrightarrow{W}$ un sous-espace affine de E. On appelle repère de W tout couple $(\Omega, \mathcal{B})$ avec $\Omega \in W$ et $\mathcal{B}$ une base de $\overrightarrow{W}$ (en particulier, on *peut* prendre $\Omega = a$).
Si $\dim(W) < +\infty$, pour tout point $A \in W$, on appelle coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ le n-uplet $\left.\overrightarrow{\Omega A}\right|_{\mathcal{B}}$.

Une façon canonique pour décrire un sous-espace affine est de s'en donner un repère, de même que pour décrire un sous-espace vectoriel de E, on peut se donner une base de E.
Les coordonnées d'un point dans un repère généralisent le concept de coordonnées vu dans le plan au collège.

Exemple 4 Un repère de $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ 2x + y + z = 3\right\}$ est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right)$.

Exemple 5 Un repère de $\{y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y' = y + 1\}$ est $\Big(x \mapsto -1, \big(\exp\big)\Big)$.

II L'exemple fondamental

II.1 L'exemple fondamental de sous-espace affine

Théorème 2 : Exemple fondamental de sous-espace affine.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
Alors $W = \Big\{x \in E,\ f(x) = b\Big\}$ est vide ou est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.
1. Si W est vide, n'en parlons plus.
2. Sinon, il existe un vecteur $x_0 \in W$. On a alors : $x \in W \Leftrightarrow f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow x \in x_0 + \mathrm{Ker}(f)$. D'où $W = x_0 + \mathrm{Ker}(f) = \tau_{x_0}\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$ et W est bien un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$.

□

II.2 Illustrations

Exemples 6

1. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ 2x + y + z = 3\right\}$ est bien de cette forme, avec : $E = \mathbb{K}^3$, $F = \mathbb{K}$, $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x + y + z$, $b = 3$.
2. $\{y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y' = y + 1\}$ est bien de cette forme, avec : $E = \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \mathcal{D}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f = y \mapsto y' - y$, $b = x \mapsto 1$.
3. Pour $n \geqslant 2$, $W = \Big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tM + M = I_n\Big\}$ est un cas particulier de l'exemple fondamental, avec : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f = M \mapsto {}^tM + M$, $b = I_n$.
C'est un sea car on a $\frac{1}{2}I_n \in W$.

4. Pour $n \geqslant 2$, $W = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tM + M = E_{1,n}\right\}$ est un cas particulier de l'exemple fondamental, avec : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f = M \mapsto {}^tM + M$, $b = E_{1,n}$.
Mais c'est l'ensemble vide car pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a ${}^tM + M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $E_{1,n} \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

III Applications

III.1 Suites récurrentes affines doubles

On s'intéresse aux suites $(u_n)_n$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n + c_n$.
Comme dans le chapitre « dimension finie », on se limitera ici au cas où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont constantes, mais pas nécessairement $(c_n)_n$.

Notation 1 (maison) : $E_{a,b,(c_n)_n} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n\right\}$.

Proposition 2 .
$E_{a,b,(c_n)_n}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de direction $\mathcal{S}_{a,b}$.

Démonstration.
C'est une application de l'exemple fondamental avec : $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $F = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = (u_n)_n \mapsto (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_n$, $b = (c_n)_n$.
$E_{a,b,(c_n)_n}$ est non vide d'après le théorème de construction par récurrence double $\Big($ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique suite dans $E_{a,b,(c_n)_n}$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$... donc $E_{a,b,(c_n)_n}$ est "très" non vide $\Big)$. □

Exemple 7 Déterminons $(u_n)_n$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$.

Solution homogène $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$
$X^2 - X - 1 = 0$
$\Delta = 1 + 4 = 5 \implies X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$u = \lambda X_1^{\mathrm{id}} + \mu X_2^{\mathrm{id}}$$

Solution particulière $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_n = \lambda X_1^n + \mu X_2^n$$

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda X_1 + \mu X_2 &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 2 - \lambda \\ \lambda X_1 + (2-\lambda) X_2 &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 2 - \lambda \\ \lambda (X_1 - X_2) &= 1 - 2X_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 2 - \lambda \\ \sqrt{5}\lambda &= \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 1 \\ \mu &= 1 \end{cases}$$

Toute la difficulté ici est donc de trouver une solution particulière. Essayons de généraliser la méthode employée dans l'exemple précédent.

Proposition 3 : Recette de grand-mère..
Notons $\chi(X) = X^2 - aX - b$ le polynôme caractéristique.
Si $(c_n)_n$ est de la forme $\big(P(n)q^n\big)_n$ avec P un polynôme de degré p alors :

- Si q n'est pas racine de χ alors il existe une solution particulière de la forme $\big(q^n Q(n)\big)_n$ où $\deg(Q) = p$.
- Si q est racine simple de χ alors il existe une solution particulière de la forme $\big(nq^n Q(n)\big)_n$ où $\deg(Q) = p$.
- Si q est racine double de χ alors il existe une solution particulière de la forme $\big(n^2 q^n Q(n)\big)_n$ où $\deg(Q) = p$.

Autrement dit, on a toujours une solution particulière de la forme $\big(n^\mu q^n Q(n)\big)_n$ où μ est la multiplicité de q comme racine du polynôme caractéristique.

Démonstration. Par calcul direct (pénible mais sans astuce). □

Exercice 2. Déterminons $(u_n)_n$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1$.

Le second membre est de la forme $P(n)q^n$ avec $P(n) = 1$ et $q = 1$

Manque de bol : 1 est racine double du polynôme :
Solutions homogènes on a déjà calculé les racines du polnyôme caractéristique $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
Solution générales ?
$\lambda n + \mu + \frac{n^2}{2}$

$$\begin{cases} 1 & = u_0 = \mu \\ \frac{3}{2} & = u_1 = \lambda + \mu + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} \lambda & = 0 \\ \mu & = 1 \end{cases}$$
$$\text{ie } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2}{2} + 1$$

Exercice 3. Déterminons l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2^n n$.

Le second membre est de la forme $P(n)q^n$ avec $P(n) = n$ et $q = 2$
Manque de bol : 2 est racine simple du polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2$
On cherche une solution particulière sous la forme

$$(u_n)_n = (n(an+b)2^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a(n+2)^2 + b(n+2))2^{n+2} - 3(a(n+2)^2 + b(n+1))2^{n+1} + 2(an^2 + bn)2^n = n^n_2$$

On développe et on divise par 2^n

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4an + (10a + 2b) = n$$
$$\text{ie } \begin{cases} a & = \frac{1}{4} \\ b & = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Remarque : Wolfram Alpha sait faire.

III.2 Polynômes de Lagrange : le retour

On fixe un entier n, ainsi que $n+1$ scalaires distincts $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, et $n+1$ scalaires non nécessairement distincts $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$.

Théorème 3 .
L'ensemble $\big\{P \in \mathbb{K}[X],\ \forall i \in \{0, \dots, n\},\ P(\alpha_i) = \beta_i\big\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$.

- Sa direction est : $\left(\prod_{i=0}^{n}(X - \alpha_i)\right)\mathbb{K}[X]$.
- Il passe par : $L(X) = \sum_{k=0}^{n} \beta_i L_i(X)$.

Démonstration. C'est encore l'exemple fondamental ! $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \mathbb{K}^{n+1}$, $f = P \mapsto \begin{pmatrix} P(\alpha_0) \\ P(\alpha_1) \\ \vdots \\ P(\alpha_n) \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} E &= \mathbb{K}[X] \\ F &= \mathbb{K}^{n+1} \\ f &= P \mapsto \begin{pmatrix} P(\alpha_0) \\ \vdots \\ P(\alpha_n) \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Direction $\operatorname{Ker} f = \left(\prod_{i=0}^{n}(X-\alpha_i)\right)\mathbb{K}[X]$

Passe par $L(X) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k(X)$

□

III.3 Systèmes linéaires

Théorème 4 : Théorème de structure affine.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est vide ou bien un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ de direction l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.

Démonstration. C'est encore un cas particulier de l'exemple fondamental avec : $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$. □

$$\{P, \begin{cases} \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], P = (X-1)^2 Q_1 - 1 \\ \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], P = (X+1)^2 Q_2 + 1 \end{cases}\} = \{P, \begin{cases} P \bmod (X-1)^2 &= -1 \\ P \bmod (X+1)^2 &= +1 \end{cases}\}$$

On a $\begin{cases} E &= \mathbb{K}_4[X] \\ F &= \mathbb{K}_2[X] \\ b &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f &= P \mapsto \begin{pmatrix} P \bmod (X-1)^2 \\ P \bmod (X+1)^2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Interprétation géométrique : l'ensemble des solutions est l'intersection (éventuellement vide) des hyperplans affines dont les équations sont celles du système. Finalement, résoudre un système linéaire, c'est montrer que l'espace de ses solutions est vide ou en trouver un repère lorsque le système est compatible.

III.4 Distance à un hyperplan affine

Dans cette sous-section on suppose qu'on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lemme 1 .

Soient $M, N, a \in E$ Alors

$$d(\tau_a(M), \tau_a(N)) = d(M, N)$$

Démonstration.

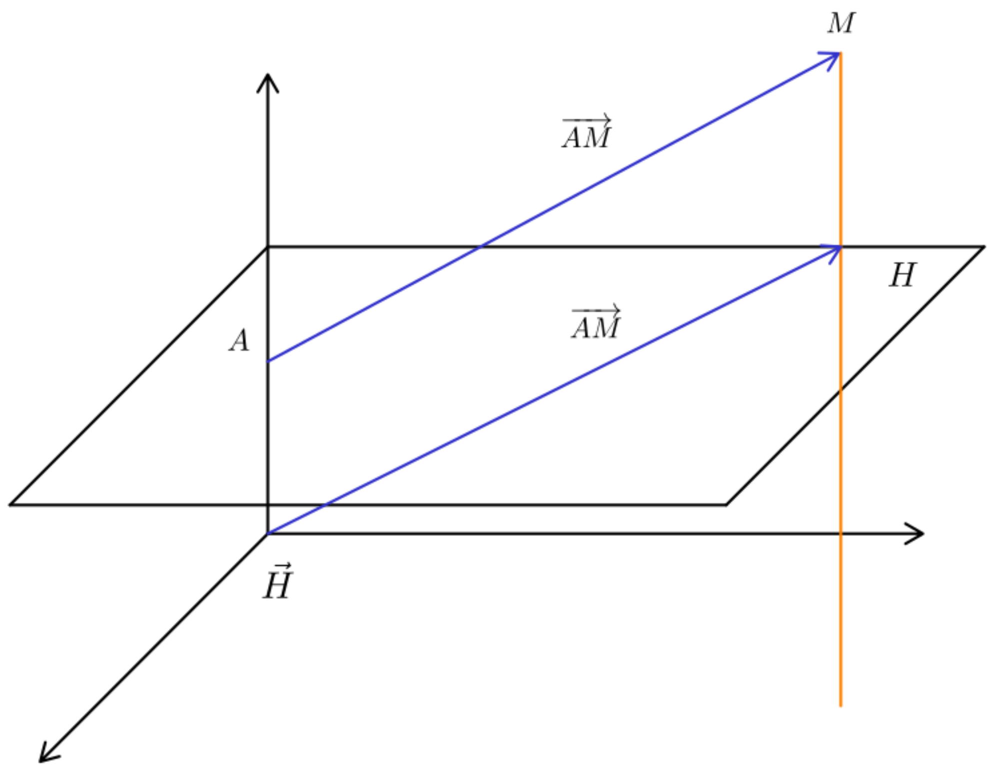
$$\begin{aligned} d(\tau_a(M),\tau_a(N)) &= \|(M+a)-(M-a)\| \\ &= \|M-N\| \\ &= d(M,N) \end{aligned}$$

□

Théorème 5 .
La distance d'un point M à l'hyperplan affine passant par un point A et ayant pour vecteur normal unitaire η est $|\langle \overrightarrow{AM}, \eta\rangle|$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{AM},\vec{H}) &= \left|\,\left\langle \overrightarrow{AM},\eta\right\rangle\,\right| \\ &= d(M-1,\vec{H}) \\ &= d(M,\underbrace{A+\vec{H}}_{H} && \text{Lemme 1} \end{aligned}$$



□