$\boxed{2}$

$$D_n := \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & (0) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= 2D_{n-1} - \left(D_{n-2} + (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}_{n-2}\right)$$

ie $\forall n \geq 3, \; D_n - 2D_{n-1} + D_{n-2} + (-1)^n = 0$

ie $\forall n \geq 1 \; D_{n+2} - 2D_{n+1} + D_{n+1} + D_n + (-1)^n = 0$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 2 - 2 = 5$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_3 - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6$$

$C_n = (-1)^n P(n)$; $\quad P(n) = -1$

Polynôme caractéristique $(X-1)^2$

Donc -1 n'est pas racine

Donc $S_p = (-1)^n a, \quad a \in \mathbb{K}$

$(-1)^n a - 2(-1)^{n+1} a + (-1)^n a + (-1)^n = 0$

ie $\left((-1)^n + 2(-1)^n + (-1)^n\right)a + (-1)^n = 0$

ie $(-1)^n(4a+1) = 0$

ie $a = -\frac{1}{4}$

$$D_n = \lambda n + \mu - \frac{1}{4}(-1)^n, \quad \binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{K}^2$$

$$\begin{cases} D_3 = 5 = 3\lambda + \mu + \frac{1}{4} \\ D_4 = 6 = 4\lambda + \mu - \frac{1}{4} \end{cases}$$

ie $\begin{cases} 1 = \lambda - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu = 5 - 3\lambda - \frac{1}{4} = \frac{20}{4} - \frac{18}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$

Ainsi $\forall n \geq 1, \; D_n = \frac{1}{4}\left(6n + 1 - (-1)^n\right)$

$\boxed{3}$

$$E = \mathbb{R}_{n+1}[X] = \left\{ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + \cdots + a_{2n+1} X^{2n+1}, \; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R = \left\{ P \in E, \; P = X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) \right\}$$

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + \cdots + a_{2n+1} X^{2n+1}$$

$$P\left(\frac{1}{X}\right) = a_0 + \cdots + \frac{a_n}{X^n} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{X^{2n+1}}$$

$$X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) = a_0 X^{2n+1} + \cdots + a_n X^{n+1} + a_{n+1} X^n + \cdots + a_{2n+1}$$

$\mathcal{R}$ = polynômes palindromes

$\mathcal{A}$ = polynômes anti-palindromes

On a $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{2n+1}[X] \\ P(X) \longmapsto X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) \end{cases}$

On a ϕ endomorphisme involutif donc une symétrique.

D'après le cours :

$$\phi = S_{\operatorname{Ker}(\phi - id)}^{\operatorname{Ker}(\phi + id)} = S_{\mathcal{R}}^{\mathcal{A}} \quad \text{par définition}$$

et en particulier $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$ sont des seus supplémentaires

$$\mathcal{R}_Q = \left\{ P \in E,\ X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) - P(X) = Q(X) \right\}$$

Exemple fondamental de s.e.a.

$$\begin{cases} E = \mathbb{R}_{2n+1}[X] \\ F = \mathbb{R}_{2n+1}[X] \\ f = \begin{cases} E \longrightarrow F \\ P \longmapsto X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) - P(X) \end{cases} = \phi - id \\ b = Q(X) \end{cases}$$

Donc $R_Q = \emptyset$ ou R_Q s.e.a de direction

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(\phi - id) = \mathbb{R}$$

Si $R_Q \neq \emptyset$, Alors, pour $P_0 \in R_Q$, on a

$$Q(X) = X^{2n+1} P_0\left(\frac{1}{X}\right) - P_0(X)$$

Or $$S_{\mathrm{Ker}(\phi - id)}^{\mathrm{Ker}(\phi + id)} = S_{\mathrm{Im}(\phi + id)}^{\mathrm{Im}(\phi - id)}$$

donc $Q(X) \in \mathrm{Im}(\phi - id) = \mathcal{A}$

Condition nécessaire : $Q \in \mathcal{A}$

Elle est suffisante car si $Q \in \mathcal{A}$ alors

$$-\frac{Q(X)}{2} \in R_Q$$

En effet on a alors

$$X^{2n+1}\left(-\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{1}{X}\right) - \left(-\frac{Q}{2}\right)(X) = -\frac{1}{2}\underbrace{\left(\overbrace{X^{2n+1} Q\left(\frac{1}{X}\right)}^{-Q(X)} - Q(X)\right)}_{-2Q(X)}$$

$$= Q(X)$$