Séries

Facile ?

Exercice 1. *Applications directes*

Donner la nature de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n!}$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)^n$;
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(n)$.

Exercice 2. *Principe de comparaison*

1. Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
2. Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \mathrm{O}\big(u_n\big)$, quelle est la nature de $\sum_n u_n$?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $q \geqslant 0$ pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^n}{n!q^n}$ converge.

Exercice 3.

1. Montrer la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
2. Retrouver la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Exercice 4. *Moins facile.*

Montrer la convergence puis calculer la somme de : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2 2^n}{n!}$.

Séries à termes positifs

Exercice 5. *Théorème d'Olivier.*

Dans cet exercice, on se donne une suite décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on suppose que la série de terme général u_n converge.

1. Justifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes positifs.
2. En considérant $S_{2n}-S_n$, où S_n désigne la n^e somme partielle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, montrer qu'on a $u_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Montrer finalement qu'on a $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. Le résultat se maintient-il si l'on ne suppose pas la décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 6. *Séries de Bertrand*

On s'intéresse aux séries de Bertrand dont le terme général est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$.

1. Quelle est la nature de la série pour $\alpha > 1$? *On pourra poser $\alpha = 1+\varepsilon$ et écrire* $\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}} = \dfrac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \times \dfrac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}$.
2. Quelle est la nature de la série pour $\alpha < 1$? *On pourra poser $\alpha = 1-\varepsilon$...*
3. Montrer que si $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, la série diverge.
4. Montrer que si $\beta > 0$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ \ln^\beta(t)}$ est décroissante à partir d'un certain rang, puis déterminer une primitive de f. *On pourra traiter à part le cas $\beta = 1$.* En déduire la nature de la série dans ce cas.
5. Finalement, donner une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de Bertrand.

Exercice 7. *Critère de condensation.*

Dans cet exercice, on se donne une suite **décroissante** et **à termes positifs** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n\, u_{2^n}$ sont de même nature (critère dit *de condensation* ou *de la loupe* ou *de Cauchy*[1]).
2. Application : retrouver la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de Riemann.
3. Application : retrouver la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de Bertrand.

Manipulations algébriques

Exercice 8. *Variations sur $\zeta(2)$*

Montrer la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 9. *Encore une DES...*

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

1. Justifier l'existence et la finitude de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
2. Rappeler sans démonstration un développement asymptotique à deux termes de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, puis en déduire un développement asymptotique à deux termes de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$ et $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$.
3. En déduire la somme S de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
4. Retrouver le résultat en considérant $\dfrac{S}{2}$.

Exercice 10. *Deux séries à termes complexes.*

Montrer la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n)}{2^n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n)}{n!}$.

Exercice 11. *Commutativité... ou pas ?*

Dans cet exercice on considère une série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et une bijection $\sigma \in S(\mathbb{N})$, c'est-à-dire une application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. L'application σ correspond donc à une permutation des indices des termes de la série. Se demander si la "somme" est commutative, c'est donc se demander si on a toujours $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. On suppose ici que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est à termes positifs**.

   Montrer qu'on a alors bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   On commencera par expliquer pourquoi cette égalité a toujours un sens, et on pourra distinguer le cas où $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge du cas où elle diverge.*

1. Mais le théorème d'Arnold s'applique.

2. On suppose ici qu'on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $\sigma(n) = \begin{cases} 2p & \text{si } n = 3p \\ 4p+1 & \text{si } n = 3p+1 \\ 4p+3 & \text{si } k = 3p+2 \end{cases}$.
   (a) Rappeler la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   (b) Justifier que σ est bijective. On n'hésitera pas à écrire ses premières valeurs.
   (c) Simplifier $u_{\sigma(3k)} + u_{\sigma(3k+1)} + u_{\sigma(3k+2)}$. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.
   (d) Qu'en déduire ?

3. On suppose ici encore qu'on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, mais cette fois on pose $\sigma(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2p+1 & \text{si } n = 2^p \\ 2(n-1-\lfloor \lg(n) \rfloor) & \text{sinon.} \end{cases}$
   On a posé ici $\lg(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, c'est le logarithme à base 2.
   (a) Écrire les premières valeurs de σ et expliquer plus simplement qu'avec la formule son comportement.
   On admettra, c'est un peu pénible à rédiger proprement mais très facile à comprendre, que σ est bien bijective.
   (b) Donner un équivalent simple de $\sum\limits_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} u_{\sigma(k)}$. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.
   (c) Qu'en déduire ?

Remarque : on peut aussi trouver σ pour que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$, ou ait pour somme n'importe quel réel, ou même pour que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$ n'ait pas de somme.

Natures et estimations

Exercice 12. Donner uniquement la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \right) \; ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \; ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^{\ln^2(n)}} \; ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$$

Exercice 13. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)\ln(\ln(k))}$.

Exercice 14. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2}$. Justifier que R_n a une limite nulle, puis en donner un équivalent simple.