EX $\underline{\text{N}}$ SÉRIES

$\boxed{6/1}$

Posons $\alpha = 1+\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$

Alors $$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}} \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{2}} \ln(n)^\beta}}_{\to 0 \text{ par CC}} = o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}\right)$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^\times} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$ est une série de Riemann

De plus, $1+\frac{\varepsilon}{2} > 1$ donc la série converge.

On a $\Bigg\{$

par PdC,

$\boxed{6/2}$ Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = 1-\varepsilon$

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \underbrace{\frac{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln(n)^\beta}}_{\to +\infty \text{ ÀPCR}} \geq \overbrace{\frac{1}{n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}}^{\text{c'est un } o(\dots)} \text{ ÀPCR}$$

Or $\sum_n \frac{1}{n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$ diverge. $\sum_n \frac{1}{n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$, $\sum \frac{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln(n)^\beta}$

donc par PdC, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge.

$\boxed{6/3}$

Dans ce cas: $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \dfrac{\ln(n)^{|\beta|}}{n} \geqslant \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{H_n}$

Par PdC, $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge (car ce sont des STPs)

$\boxed{6/4}$

$$f' = t \mapsto \frac{-1}{t^2 \ln(t)^\beta} + \frac{1}{t} \frac{-\beta}{\ln(t)^{\beta+1} t}$$

$$= t \mapsto -\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{\ln(t)^\beta} + \frac{\beta}{\ln(t)^{\beta+1}} \right)$$

Donc, puisque $\forall t > 1,\ \dfrac{1}{\ln(t)^\beta} + \dfrac{\beta}{\ln(t)^{\beta+1}} > 0$

Or $-\dfrac{1}{t^2} < 0$, alors $f' < 0$ sur $]1, +\infty[$

Alors, avec $\begin{cases} f \in \mathcal{C}([2, +\infty[, \mathbb{R}_+) \\ f \in \searrow \text{ par TSD} \end{cases}$

$$\int_2^{n+1} f \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \int_2^n f$$

Posons $\begin{cases} u = \ln \\ v = \dfrac{1}{\ln^\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{id} \\ v' = -\dfrac{-\beta}{id \cdot \ln^{\beta+1}} \end{cases}$

Alors $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)^\beta}\, dt = \left[\frac{-\beta}{t \ln(t)^\beta} \right]_{t=2}^{n+1} - \int_2^{n+1} \frac{-\beta}{t \ln(t)^\beta}\, dt$

$$= \beta \left(\frac{1}{\ln(4)^\beta} - \frac{1}{} \right.$$

$\boxed{9/1}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n(2n-1)} = \Theta\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ \sum_n \dfrac{1}{n^2},\ \sum_n \dfrac{1}{n(2n-1)} \quad \text{STP} \\ \sum \end{cases}$$

par PdC

$\boxed{9/2}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-2} + \dfrac{1}{2n} \\ b_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2n-3} + \dfrac{1}{2n-1} \end{cases}$$

$$a_n + b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = H_{2n}$$

9/3

$$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n-1} = \alpha + \frac{n\beta}{2n-1}$$

$$n = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\alpha(2n-1)}{n} + \beta$$

$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

d'où $\quad u_n = -\frac{1}{n} + 2\frac{1}{2n-1}$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$

donc $\displaystyle S = \lim_{n\to\infty} \ln 4 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= 2\ln 2$$

9/4

$$\frac{S_n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2}$$

Or $\displaystyle \frac{u_k}{2} = \frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{x(x-1)}$ avec $x := 2k$

$$= \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

donc

$$\frac{S_n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p+1}}{p}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln 2$$

$\boxed{13 \text{ fin}}$

$$\underbrace{\ln^{\circ 3}(n+1) - \ln^{\circ 3}(3)}_{\alpha} \leq T_n \leq \ln \ln \ln n + \underbrace{\frac{1}{3 \ln 3 \ln(\ln 3)} - \ln^{\circ 3}(3)}_{\beta}$$

ie $\ln^{\circ 3}(n+1) + \alpha \leq T_n \leq \ln^{\circ 3}(n) + \beta$

ie $$\underbrace{\frac{\ln^{\circ 3}(n+1)}{\ln^{\circ 3} n}}_{\to 1 ?} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ln^{\circ 3}(n)}}_{\to 0} \leq \frac{T_n}{\ln^{\circ 3}(n)} \leq \underbrace{1 + \frac{\beta}{\ln^{\circ 3} n}}_{\to 1}$$

Montrons-le.

$$\frac{\ln^{\circ 3}(n+1)}{\ln^{\circ 3} n} = \frac{}{\ln^{\circ 3}(n)}$$