EXO SÉRIES

$\boxed{5/1}$

$$\begin{cases} (u_n)_n \in \mathcal{D} \\ \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$

par TLM, $u_n \to \inf u = 0$

donc 0 minore u_n

donc $\sum u_n$ STP

$\boxed{5/2}$

S_n converge donc $S_{2n} \to \lim\limits_{+\infty} S_n = \ell$

d'où $S_{2n} - S_n \to \ell - \ell = 0$

Or par positivité et décroissance de $(u_n)_n$, on a :

$$0 + 0 + \cdots + 0 \leq u_{2n} + \cdots + u_{2n} \leq u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$$

$$0 \leq n u_{2n} \leq \underbrace{S_{2n} - S_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Par TdG, $n u_{2n} = \dfrac{u_{2n}}{\frac{1}{n}} \to 0$ ie $u_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\boxed{5/3}$

Mq $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. ie

Mq $\begin{cases} u_{2n} = o\left(\frac{1}{2n}\right) \Leftrightarrow u_{2n} 2n \to 0 \\ u_{2n+1} = o\left(\frac{1}{2n+1}\right) \Leftrightarrow (2n+1) u_{2n+1} \to 0 \end{cases}$ (théorème pair/impair)

- D'après $\boxed{2}$, $n u_{2n} \to 0$

Par PAL, $2n u_{2n} \longrightarrow 2 \cdot 0 = 0$

- $0 \leq (2n+1) u_{2n+1} \leq (2n+1) u_{2n}$ par décroissance.

ie

$$0 \leq (2n+1) u_{2n+1} \leq \underbrace{2n u_{2n}}_{\to 0} + \underbrace{u_{2n}}_{\to 0}$$

Par TdG, $(2n+1) u_{2n+1} \longrightarrow 0$

ie $u_{2n+1} = o\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

$\boxed{5/4}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \longrightarrow \ln 2 \text{ par ITL}$$

$\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_n \not\searrow$ $\quad n \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} = (-1)^{n+1}$ PDL

donc $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

Meth 2 Avec une STP

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= (0, 1, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, 0, 0, \tfrac{1}{8}, 0, \dots)$$

$$\sum_{n}^{\infty} u_n = 2 \quad \text{mais} \quad u_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{car} \quad \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\not\to 0 \qquad !!!$$