EX_SERIES

$\boxed{1/1}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n!}$$

On a $\begin{cases} \dfrac{\ln n}{n!} \leq \dfrac{1}{n^2} & \text{APCR} \\ \sum \dfrac{1}{n^2}, \sum \dfrac{\ln n}{n!} & \text{STP} \\ \sum \dfrac{1}{n^2} & \text{converge} \end{cases}$

d'après le PdC,

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge

$\boxed{1/2}$

$$\left|\frac{1}{2} + i\frac{2}{3}\right| = \frac{5}{6} < 1$$

donc ok!

$\boxed{1/3}$

$\sin \not\to 0 \Rightarrow \sum \sin n$ diverge (grossièrement)

$\boxed{2/1}$

$\begin{cases} \sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \sum \dfrac{1}{n} \quad \text{STP} \\ \dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ \sum \dfrac{1}{n} \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

$\boxed{2/2}$

$\begin{cases} \sum u_n, \sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{STP} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(u_n) \\ \sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum u_n$ diverge

On a $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ d'après Stirling.

$$\sim \frac{n^n}{n!\,q^n}$$

$$\sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n q^n}$$

$$= \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\,q^n}$$

$$= \left(\frac{e}{q}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

Pour que $\sum \frac{n^n}{n!\,q^n}$ converge il faut et suffit que

$\left|\frac{e}{q}\right| < 1$ ie $q > e$

Montrons-le.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $q > e$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{q}\right)^n = o\left(\left(\frac{e}{q}\right)^n\right) \\ \sum_{n\in\mathbb{N}^\times} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}^\times}\left(\frac{e}{q}\right)^n \quad \text{STP} \\ \sum \left(\frac{e}{q}\right)^n \text{ converge car } q > e \end{cases} \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{q}\right)^n \text{ converge}$$

De même,

$$\begin{cases} \dfrac{n^n}{n!\,q^n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n \\ \sum \dfrac{n^n}{n!\,q^n},\ \sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n \text{ STP} \\ \sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{n!\,q^n} \text{ converge.}$$

Supposons $q < e$

$$\begin{cases} \sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n,\ \sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \text{ STP} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \text{ donc } \dfrac{1}{\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n\right) \end{cases}$$

D'après 2/2, $\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{q}\right)^n$ diverge

$$\begin{cases} \dfrac{n^n}{n!\,q^n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n \\ \sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n,\ \sum \dfrac{n^n}{n!\,q^n} \text{ STP} \\ \sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{q}\right)^n \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum \frac{n^n}{n!\,q^n} \text{ diverge}$$

$\boxed{4}$

$$\frac{\dfrac{n^2 2^n}{n!}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = \frac{n^2 3^n}{n!} = \frac{n\cdot 3^n}{(n-1)!} = \underbrace{\frac{n\cdot 27}{(n-1)(n-2)}}_{\to 0} \underbrace{\frac{3^{n-3}}{(n-3)!}}_{\substack{\to 0 \\ \text{par CC}}} \longrightarrow 0$$

Donc
$$\begin{cases} \dfrac{n^2 2^n}{n!} = o\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) \\ \sum \dfrac{n^2 2^n}{n!},\ \sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \text{ STP} \\ \sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \text{ converge car } \dfrac{2}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \sum \frac{n^2 2^n}{n!} \text{ converge}$$

On a $k^2 = k(k-1)+k$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)2^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k2^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)2^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{k!} \quad \text{car } \begin{matrix} k=0, & k=1 \\ k=0, & \text{nuls.} \end{matrix}$$

$$= 4\sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= 4\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$$

$$= 6\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^k}{k!} + 2\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 6e^1$$

d'où $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} \frac{n2^n}{n!} = 6e^2$

L'idée dernière

- On sait calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

- Par changt d'indice, on sait calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)x^n}{n!},\ \sum^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^n}{n!},\ \sum^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^n}{n!}, \text{etc.}$$

Généralisons,

Soit $P \in \mathbb{K}_d(X)$

On veut calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)x^n}{n!}$

On <u>décompose</u> P dans la base

<u>$(1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\cdots(X-d+1))$</u>

EX$^{\underline{M}}$ SÉRIES

$\boxed{3/1}$

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 1} \ln(n+1) \quad \text{STP} \\ \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k}\right)_n \end{cases}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k\right)_n$$

$$= \left(\ln(n+1)\right)_n \quad \text{n'est pas majorée}$$

donc, par th fondamental, $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge

$\boxed{3/2}$

$$\begin{cases} \sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \sum \frac{1}{n} \quad \text{STP.} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \\ \sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ diverge d'après } 3/1 \end{cases}$$

donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge par PdC$_\sim$