1 Critère de la loupe

Traitons deux cas.

<u>1er cas</u> *($\sum u_n$ converge)*:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de u, on a:

$$\begin{aligned}
u_2 &\geq u_2 \\
u_3 &\geq u_4 \\
u_4 &\geq u_4 \\
u_5 &\geq u_8 \\
u_6 &\geq u_8 \\
u_7 &\geq u_8 \\
u_8 &\geq u_8 \\
&\vdots \quad \text{par récurrence} \\
u_{2^n} &\geq u_{2^n}
\end{aligned}$$

En sommant:

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + \cdots + u_n \geq \underbrace{u_2}_{2^0} + \underbrace{u_4 + u_4}_{2^1} + \underbrace{u_8 + u_8 + u_8 + u_8}_{2^2} + \cdots + \underbrace{u_{2^n} + \cdots + u_{2^n}}_{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
\text{i.e.} \quad \sum_{k=2}^{2^n} u_k &\geq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{k-1} u_{2^k} \\
\text{i.e.} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} u_k &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} u_{2^k} \qquad \text{par stabilité par lim de } \geq
\end{aligned}$$

Or on a $\sum_{k=2}^{\infty} u_k < +\infty$ par hypothèse, donc, par transitivité:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} u_{2^k} < +\infty \\
\text{i.e.} \quad &\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k} u_{2^k} < +\infty \qquad \text{par multiplication par 2} \\
\text{d'où} \quad &\sum_{n} 2^{n} u_{2^n} \text{ converge}
\end{aligned}$$

<u>2ème cas</u> *($\sum u_n$ diverge)*:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de u, on a:

$$\begin{aligned}
2u_2 &\geq u_2 + u_3 \\
4u_4 &\geq u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\
8u_8 &\geq u_8 + u_9 + \cdots + u_{15} \\
&\vdots \quad \text{par récurrence} \\
2^n u_{2^n} &\geq u_{2^n} + \cdots + u(2^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

En sommant:

$$\sum_{k=2}^{n} 2^k u_{2^k} \geq \sum_{k=2}^{2^{n+1}-1} u_k$$
$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} 2^k u_{2^k} \geq \sum_{k=2}^{+\infty} u_k$$

Or on a $\sum_n u_n$ diverge. Par définition de la divergeance

- $\sum_n^\infty u_n \neq -\infty$ car $u \geq 0$
- $\sum_n^\infty$ est définie (i.e. $\left(\sum_n u_n\right)_n$ a une limite)

Donc on a $\sum_n^\infty u_n = +\infty$.
Par transitivité, on a bien

$$\sum_n^\infty 2^n u_{2^n} = +\infty$$

2 Applications

2.1 Riemann

Posons $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sum_n 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} &= \sum_n 2^n \cdot 2^{-n\alpha} \\ &= \sum_n (2^{1-\alpha})^n \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_n^\infty 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = +\infty &\iff |2^{1-\alpha}| < 1 && \text{car géométrique} \\ &\iff -1 < 2^{1-\alpha} < 1 \\ &\iff 2^{1-\alpha} < 1 && \text{car } 2^{\text{id}} > 0 \\ &\iff 1 - \alpha < 0 \\ &\iff \alpha > 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_n^\infty \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \iff \alpha > 1 \qquad \text{d'après 1}$$

2.2 Bertrand

Posons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Montrons que

$$\sum_n^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = +\infty \iff (\alpha, \beta) >_{\text{lex}} (0, 0)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha \ln(2^n)^\beta} &= \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}(n \ln 2)^\beta} \\ &= \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1} n^\beta \ln(2)^\beta} \\ &=: \mathfrak{B}_n \end{aligned}$$

Traitons deux cas.

<u>1er cas</u>($\alpha = 1$):

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_n^{\infty} \mathfrak{B}_n &= \sum_n^{\infty} \frac{1}{\cancel{(2^n)^0} n^\beta \ln(2)^\beta} \\ &= \frac{1}{\ln(2)^\beta} \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^\beta} \\ &= +\infty \iff \beta > 1 && \text{d'après Riemann et par linéarité} \end{aligned}$$

<u>2ème cas</u>($\alpha \neq 1$):

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_n^{\infty} \mathfrak{B}_n &= \frac{1}{\ln(2)^\beta} \sum_n^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{1-\alpha} n^\beta} \\ &= +\infty \iff 1 - \alpha > 1 \text{ i.e. } \alpha > 1 && \text{car } n^\beta = o((2^n)^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

On retrouve donc bien:

$$\begin{aligned} &\sum_n^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)\alpha \ln(2^n)^\beta} = +\infty \iff (\alpha = 1 \land \beta > 1) \lor \alpha > 1 \\ \text{i.e.} \quad &\sum_n^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = +\infty \iff (\alpha, \beta) >_{\text{lex}} (1, 1) && \text{d'après 1 et par définition de } >_{\text{lex}} \end{aligned}$$