Séries

obj Donner un sens à des sommes "infinies" comme :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots = 2$$

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots = \cancel{-\frac{1}{12}} = +\infty$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots = \ln 2$$

On perd la commutativité s'il y a des négatifs

$$1+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}_{\geqslant 0}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}}_{\geqslant 0}+\cdots \geqslant 1 \neq \ln 2$$

I Généralités

1 Définition

def série

Suite de la forme $\left(\sum_{k=n_0}^{n} \overbrace{u_k}^{\text{terme général}}\right)_{n\geqslant n_0}$

def n-ième somme partielle

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

notn

$$\sum_{n \geqslant n_0} u_n := \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right)_n .$$

ex série harmonique

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$$

notn Avec $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$\sum_{n \in A} u_n := \sum_{n \geqslant \min(A)} u_n$$

thm lien suite—séries

$$\phi : \begin{cases} \text{séries} & \longrightarrow \text{suites} \\ \displaystyle\sum_{n \in A} u_n & \longmapsto \left(\displaystyle\sum_{k=\min A}^{n} u_k \right)_{n \in A} \end{cases} \in$$

et

$$\phi^{-1} : \begin{cases} \text{suites} & \longrightarrow \text{séries} \\ a & \longmapsto (a_n - a_{n-1})_{n \in A} \end{cases}$$

(avec la convention $a_{-1} = \min A$)

remq

- L'idée "suite" c'est d'étudier la série à l'aide de $(S_n)_n$
- L'idée "série" c'est d'étudier la série à l'aide de $(u_n)_n$

2 Somme d'une série

def somme de $(S_n)_n = \left(\sum_{k=\min A}^{n} u_k\right)_n$

Si la limite est finie ou infinie :

$$\sum_{n=\min A}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\min A}^{n} u_k$$

ex

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} = 2 \Leftarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} k = +\infty \Leftarrow \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \Leftarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = T_n(1) \text{ pour } \begin{cases} f = \ln\circ(1+x) \\ a = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

remq l'ITL est un outil puissant pour calculer des sommes de séries.
Exemples :

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n!} = e^x$$

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ n'a pas de sens car

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

... qui n'a pas de limite pour $n \longrightarrow +\infty$

def convergeance

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{n=\min A}^{+\infty} u_n < +\infty$$

def divergeance

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \neg \text{ converge}$$

(il y a deux manières de diverger)

prop-déf n-ième reste de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergeante

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge.

dem Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

rem ça permet d'estimer la vitesse de convergence de la série

Ce qui nous intéressera en priorité sera d'obtenir un équivalent simple de R_n

3 Divergence grossière

thm

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R} \Rightarrow u_n \longrightarrow 0$$

dem

$$\begin{cases} S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0 \text{ par PAL}$$

rem

C'est la contraposée qui est intéressante.

$$u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge}$$

def divergence grossière (DVG)

le terme général diverge

d'ap le **thm**, DVG $\Rightarrow$ diverge

app

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge $\Leftarrow$ $(-1)^n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ DVG

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin n$ DVG donc diverge $\Leftarrow$ $(\sin(n))_n$ n'a pas de limite

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ diverge car DVG $\Leftarrow$ $id_{\mathbb{N}} \xrightarrow[\infty]{} +\infty \neq 0$

Il existe des séries tq $\neg$DVG $\wedge$ diverge

ex
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (déjà vu)
- $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$ ("pas dur")
- $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ (plus dur)

4 Linéarité de la somme

thm linéarité de la somme

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent

$\Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u + \mu v$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

dem par PAL.

corol

$$\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u_n + \mu v_n$ diverge

dem par l'absurde

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$.

Supp $\sum_{\mathbb{N}} \lambda u + \mu v$ converge

$$\frac{1}{\mu}(\lambda u_n + \mu v_n) - \frac{\lambda}{\mu} u_n$$

d'après le théorème $\underbrace{\sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{\mu}(\lambda u + \mu v) - \frac{\lambda}{\mu} u}_{\sum_{\mathbb{N}} v}$ converge $\boxed{\lightning}$

app donner la nature[1] et, en cas de convergeance, la somme, de

---

[1] Convergeante ou divergeante

- $\sum_{\mathbb{N}} \frac{1+(-1)^{id}}{2(id!)} = \sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{2\,id!} + \frac{(-1)^{id}}{2\,id!} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{id!} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbb{N}} \frac{(-1)^{id}}{id!}$

or $\begin{cases} \sum\limits_{\mathbb{N}}^{+\infty} \frac{1}{id!} = e \\ \sum\limits_{\mathbb{N}}^{+\infty} \frac{(-1)^{id}}{id!} = \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{\mathbb{N}}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{id}}{2(id!)} = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} = \text{ch } 1$ par linéarité

- $\sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{id+1}{id^2} = \underbrace{\sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{1}{id}}_{\text{divergente}} + \underbrace{\sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{1}{id^2}}_{\text{convergente}}$

$\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{id+1}{id^2}$ diverge

-

remq

pour $\sum_{\mathbb{N}} \frac{1+(-1)^{\mathrm{id}}}{2\,\mathrm{id}!}$ regardons les sommes partielles.

$$S_{2n} = S_{2n+1} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}$$

et on retrouve avec l'ITL que la somme est ch 1.

remq

En général, sous réserve de convergeance

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+1}$$

dem Supposons $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+1}$ convergent

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2p+1} \qquad (*)$$

par commutativité d'une somme finie.

Or $\begin{cases} \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_{2p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p} & \text{car } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \sum_{p=0}^{\lfloor n-1/2 \rfloor} u_{2p+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{p=0}^{\infty} u_{2p+1} & \text{car } \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{cases}$

En passant $(*)$ à la limite on obtient $\sum_{\mathbb{N}} u$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+1}$$

⚠ Si $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{2p}$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{2p+1}$ divergent on ne peut rien dire.

5 Séries géométriques

<u>def</u> suite géométrique

suite de la forme $\sum_{\mathbb{N}} q^{id}$ où $q \in \mathbb{K}$

<u>thm</u>

$$\sum_{\mathbb{N}} q^{id} \text{ converge } \iff |q| < 1$$
$$\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}}^{+\infty} q^{id} = \frac{1}{1-q}$$

<u>dem</u>

La n-ième somme partielle est

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Traitons 3 cas.

<u>1^er cas</u> $(|q| < 1)$: $\quad q^{n+1} \longrightarrow 0$ donc $S_n \longrightarrow \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$

2e cas ($q = 1$) :

$$S_n = n+1 \longrightarrow +\infty \quad \text{donc ça diverge}$$

3e cas ($|q| > 1$) :

$$q^{id} \not\to 0 \quad \text{donc ça diverge (grossièrement)}$$

app Nature et somme éventuelle de $\sum_{\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)^{id}$

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9+16}{4 \cdot 9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}\sqrt{9}} = \frac{5}{6} < 1$$

donc ça converge, et

$$\sum_{\mathbb{N}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)^{id} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i}{\frac{25}{36}}$$

$$= \frac{18}{25} + \frac{24}{25}i$$

II Séries à terme positifs

1 Propriété fondamentale

thm

Soit $\sum_{n\in A} u_n$ une STP.[1]

1. $\sum_{\mathbb{N}}^{\infty} u \in \overline{\mathbb{R}}$

2. Suite des sommes partielles majorées
$\iff \sum_{\mathbb{N}}^{\infty} u \in \mathbb{R}$

dem c'est une reformulation du TLM
on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc $(S_n)_n \in \nearrow$

rpl C'est comme ça qu'on a montré que $\sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{1}{\mathrm{id}^2}$ converge
en majorant $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ par 2
car pour $k \geq 1$ on a $k^2 \geq k(k-1)$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

$= 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}_{\nearrow \text{ique}}$

---

[1] Suite à termes positifs

$= 1 + 1 - \frac{1}{n}$

$= 2 - \frac{1}{n}$

$\leqslant 2$

2 Principe de comparaison

thm PdC version $\leqslant$

Soient $\sum_{\mathbb{N}} u$ et $\sum_{\mathbb{N}} v$ deux séries.

1. $\begin{cases} \sum_{\mathbb{N}} u, \sum_{\mathbb{N}} v \text{ sont STP} \\ \sum_{\mathbb{N}} v \text{ converge} \\ u_n \leqslant v_n \text{ ÀPCR } n \end{cases} \Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} u$ converge

2. $\begin{cases} \sum_{\mathbb{N}} u, \sum_{\mathbb{N}} v \text{ sont STP} \\ u_n \leqslant v_n \text{ ÀPCR } n \\ \sum_{\mathbb{N}} u \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} v$ diverge.

dem

1. Supposons $\begin{cases} \sum_{\mathbb{N}} u, \sum_{\mathbb{N}} v \text{ STP}, \quad u_n \leqslant v_n \text{ ÀPCR } n = n_0 \\ \sum_{\mathbb{N}} v \text{ converge.} \end{cases}$

Notons $\begin{cases} (S_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n \\ (T_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_n \end{cases}$

D'après la propriété fondamentales sur le STP,

$(T_n)_n$ est majorée, par disons M_T

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{:= \alpha} + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

$$\leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k + \alpha \qquad \text{car } \leq \text{ stable par } \sum$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} v_k + \alpha \qquad \text{car } \sum_{\mathbb{N}} v \text{ STP}$$

$$\leq \alpha + M_T$$

donc S majorée.

donc $\sum_{\mathbb{N}} u$ converge par ppté fonda.

2. on contrapose.

app Développement décimal d'un réel positif x

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 10^{-n} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \lfloor x \rfloor \\ \alpha_1 = \lfloor 10(x - \lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor 10(x-\alpha_0) \rfloor \\ \alpha_2 = \lfloor 10(10(x-\alpha_0)-\alpha_1) \rfloor = \lfloor 10^2 x - 10^2\alpha_0 - 10\alpha_1 \rfloor \\ \vdots \end{cases}$$

Ici, $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \in [0, 9]$

donc $\begin{cases} \forall n \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{\alpha_n}{10^n} \leq \dfrac{9}{10^n} \\ \sum_{\mathbb{N}} \alpha \cdot 10^{-Id},\ \sum_{\mathbb{N}} 9 \cdot 10^{-Id} \text{ STP} \\ \sum_{\mathbb{N}} 9 \cdot 10^{-Id} \text{ converge par linéarité et critère sur les séries géométriques} \end{cases}$

app

- $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n^3+n^2+2}$

$$\begin{cases} \dfrac{n-1}{n^3+n^2+2} \leq \dfrac{n}{n^3+n^2+2} \leq \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n^3+n^2+2},\ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{STP} \\ \displaystyle\sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3+n^2+2} \in \mathbb{R}$$

- $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2-n+1}$

$$\begin{cases} \dfrac{n+1}{n^2-n+1} \geqslant \dfrac{n}{n^2-n+1} \geqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n^2-n+1},\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \text{ STP} \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n^2-n+1} \text{ diverge}$$

- $\displaystyle\sum_{\mathbb{N}} \frac{\mathrm{id}}{3^{\mathrm{id}}}$

On montre par récurrence que $3^n \geqslant n^3$ ÀPCR n

ie $\dfrac{1}{3^n} \leqslant \dfrac{1}{n^3}$

ie $\dfrac{n}{3^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

On a $\begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{\mathrm{id}}{3^{\mathrm{id}}},\ \sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{1}{\mathrm{id}^2} \text{ STP} \\ \dfrac{n}{3^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \quad \text{ÀPCR } n \\ \displaystyle\sum_{\mathbb{N}^\times} 1/\mathrm{id}^2 \text{ convergente} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{\mathrm{id}}{3^{\mathrm{id}}} \text{ convergente}$$

thm PdC version $\mathcal{O}$

1. $\begin{cases} \sum u, \sum v \text{ STP} \\ u = \mathcal{O}(v) \\ \sum^{\infty} u \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \sum^{\infty} u \in \mathbb{R}$

2. $\begin{cases} \sum u, \sum v \text{ STP} \\ u = \mathcal{O}(v) \\ \sum u \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum v \text{ diverge}$

thm PdC version o

1. $\begin{cases} \sum u, \sum v \text{ STP} \\ u = o(v) \\ \sum v \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \sum u$

2. $\begin{cases} \sum u, \sum v \text{ STP} \\ u = o(v) \\ \sum u \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum v$

thm PdC version $\sim$

$\begin{cases} \sum u, \sum v \text{ STP} \\ u \sim v \end{cases} \Rightarrow \sum u$ même nature $\sum v$

dem version $\mathcal{O}$

$u = \mathcal{O}(v) \Leftrightarrow \exists K \geq 0,\ u_n \leq K v_n$ ÀPCR n

$\sum K v$ converge par linéarité

On est ramené à la version $\geq$

dem Version o

$$u = o(v) \Rightarrow u = O(v)$$

dem version $\sim$

$$u \sim v \Rightarrow \begin{cases} u = O(v) \\ v = O(u) \end{cases}$$

app Natures de ...

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{3^n n!}$

$$\frac{n^n}{3^n n!} \sim \frac{n^n}{3^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{e^n}{3^n\sqrt{2\pi n}}$$

$$= \left(\frac{e}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\left(\frac{e}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}_{\sum_{n\in\mathbb{N}}} = o\Big(\underbrace{\left(\frac{e}{3}\right)^n}_{\sum_{n\in\mathbb{N}}}\Big) \quad \text{STP} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{e}{3}\right)^n \text{ converge car géométrique} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{e}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \text{ converge} \\ \frac{n^n}{3^n n!} \sim \left(\frac{e}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^n}{3^n n!} \quad \text{STP} \end{cases}$$

d'où $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{3^n n!}$ converge

$\sum u, \sum v$ sont de même nature.

- $\sum_{\mathbb{N}} \frac{\ln}{id^3}$

Mq $\frac{\ln n}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ie $\frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par CC

$$\begin{cases} \sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{\ln}{id^3}, \sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{1}{id^2} \quad \text{STP} \\ \frac{\ln n}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}^\times} \frac{\ln}{id^3}$ converge.

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{100}}{1{,}1^n}$

$$\frac{n^{100}}{1,1^n} = o\left(\frac{1}{1,05^n}\right)$$

en effet, $\dfrac{\frac{n^{100}}{1,1^n}}{\frac{1}{1,05^n}} = \left(\dfrac{1,05}{1,1}\right)^n n^{100}$

$$=: q^n n^{100}$$

avec $q = \dfrac{10,5}{11} < 1$

par CC, $q^n n^{100} \longrightarrow 0$

$$\begin{cases} \sum \frac{n^{100}}{1,1^n}, \ \sum \frac{1}{10,5^n} \quad \text{STP} \\ \frac{n^{100}}{1,1^n} = o\left(\frac{1}{10,5^n}\right) \\ \sum \frac{1}{10,5^n} = \sum \left(\frac{1}{10,5}\right)^n \quad \text{converge} \end{cases}$$

donc par PdC

$$\sum \frac{n^{100}}{1,1^n} \quad \text{converge}$$

3 Comparaison série / intégrale

thm

Soit $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}_{pm}([n_0, +\infty[, \mathbb{R}) \\ f \geq 0 \\ f \in \searrow \end{cases}$$

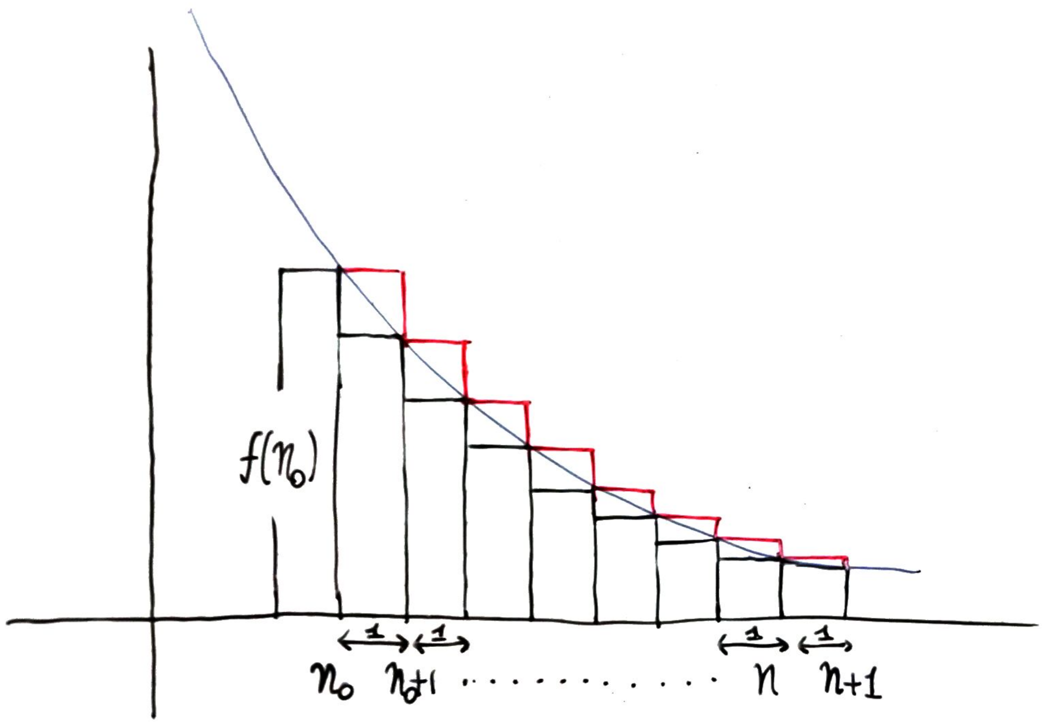
Alors $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ même nature $\left(\int_{n_0}^{n} f\right)_n$

1. Plus précisément,

$$f \in \supset \Rightarrow \int_{n_0}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f + f(n_0)$$

2.

$$f \in \supseteq \Rightarrow f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f$$



<u>dem</u>

1. Soit $k \in [\![n_0, n]\!]$

$f \in \searrow$ donc $\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

ie $\quad f(k+1) \underset{(*)}{\leq} \int_k^{k+1} f \underset{(**)}{\leq} f(k)$ par croissance de $\int$

Sommon $(**)$ pour $k \in [\![n_0, n]\!]$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f \leq \sum_{k=n_0}^{n} f$$

ie $\quad \int_{n_0}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad$ par Charles

Sommons $(*)$ pour $k \in [\![n_0, n [\![$

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} f \geq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1)$$

ie $\quad \int_{n_0}^{n} f \geq \sum_{n_0+1}^{n} f$

$+ f(n_0)$

$$\left(\int_{n_0}^{n} f \right) + f(n_0) \geq \sum_{n_0}^{n} f$$

2. par raisonnement analogue

Montrons maintenant que $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et $\left(\int_{n_0}^{n} f \right)_n$ ont même nature, ie que

$$\sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\int_{n_0}^{n} f \right)_n \text{ converge}$$

Traitons le cas $f \in \supset$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\left(\int_{n_0}^{n} f \right)_n$ converge

En particulier elle est majorée, disons par M.
On a alors

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f + f(n_0) \leq M + f(n_0)$$

donc $\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \right)_n$ est unique.

Propriété fondamentale: la série converge.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge

En particulier $\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \right)_n$ est majorée, disons par M.

Donc $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq M$

On $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f\right) \in \nearrow$ par positivité de l'intégrale et d'après Chasles

Donc par TLM, $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f\right)_n$ converge.

En changeant d'indice $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f\right)_n$ converge

def série de Riemann

On appelle série de Rihanne une série de la forme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

thm convergence d'une série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

dem

Notons $f : \begin{cases} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha} \end{cases} \in \mathcal{C}$

donc $f \in \mathcal{C}_{pm}$.

De plus, $f \geqslant 0$ et $f \in \searrow$.

Donc d'après le thm comparaison $\Sigma / \int$, on obtient que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{même nature} \quad \left(\int_1^n \frac{1}{\mathrm{Id}^\alpha} \right)_{n\geqslant 1}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^n \frac{1}{\mathrm{Id}^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{(1-\alpha)\mathrm{Id}^{\alpha-1}} \right]_1^n = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln]_1^n = \ln n & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

On a

- $(\ln n)_n$ diverge
- $\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right) \right)_n$ converge $\iff \left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \right)_n$ converge

$$\iff \alpha - 1 > 0$$

$$\iff \alpha > 1$$

app $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge

$$\begin{cases} \sum \frac{\ln n}{n^2}, \sum \overbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \quad \text{STP} \\ \frac{\ln}{\mathrm{id}^2} = o\left(\frac{1}{\mathrm{id}^{3/2}}\right) \Leftarrow \frac{\frac{\ln}{\mathrm{id}^2}}{\frac{1}{\mathrm{id}^{3/2}}} = \frac{\ln}{\mathrm{id}^{1/2}} \longrightarrow 0 \quad \text{par CC} \\ \sum \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{converge} \quad (\text{Riemann} ; \alpha = \frac{3}{2} > 1) \end{cases}$$

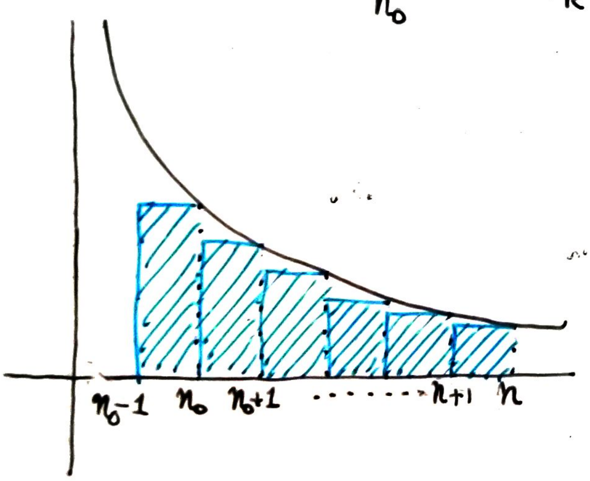
$\Rightarrow \sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge par principe de comparaison

remq

Si $\begin{cases} f \in (\mathcal{C}_{pm} \cap \supset)([n_0 - 1, +\infty[, \mathbb{R}), \\ f \geq 0 \end{cases}$

on a également :

$$\int_{n_0}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0-1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0-1}^{n} f$$



meth Utiliser le thm comparaison $\Sigma/\int$ pour estimer une convergence

On nous donne une STP divergente et on nous demande un équiv. simple de $(S_n)_n$

1. On montre la divergence

2. On vérifie les hypothèses du thm $\Sigma/\int$ sur $[n_0, +\infty[$

3. On l'applique on obtient un encadrement de S_n entre n_0 et n

4. TdG

ex estimer la vitesse de divergence de $\sum_{n\geq 1} \ln n = \sum_{n \geq 2} \ln n$

1. $\ln \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum \ln$ DVG

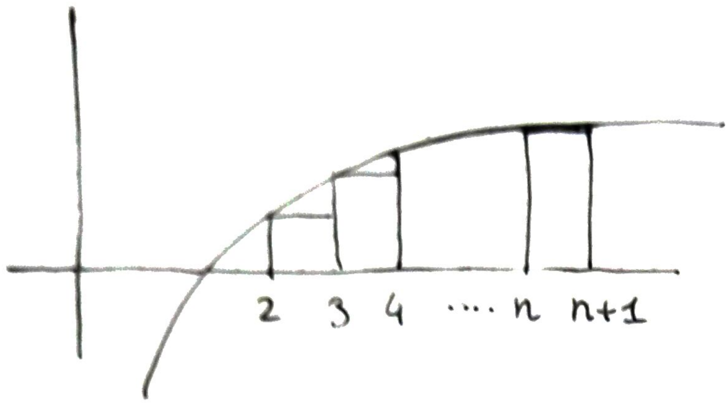
$\Rightarrow \sum \ln$ diverge

2. Notons $f : \begin{cases} [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{cases}$

- $f \in \mathcal{C} \supset \mathcal{C}_{pm}$
- $f \geq 0$
- $f \in \nearrow \supset \succeq$

3. Ainsi,

$$\int_2^n \ln + \ln 2 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \int_2^{n+1} \ln$$



On $\displaystyle\int_2^x \ln = \Big[t\ln t - t\Big]_{t=2}^{x}$

$$= x\ln x - 2\ln 2 + 2$$

Donc

$$\underbrace{\boxed{n\ln n} - n - \ln 2 + 2}_{\sim} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \underbrace{(\boxed{n}+1)\boxed{\ln(n+1)} - n + 1 - 2\ln 2}_{\sim}$$

4.

ie $$\frac{n\ln n - n - \ln 2 + 2}{n\ln n} \leq \frac{\sum_{k=2}^{n} \ln(k)}{n\ln n} \leq \frac{(n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln 2}{n\ln n}$$

Or $$\frac{n\ln n - n - \ln 2 + 2}{n\ln n} = 1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{2-\ln 2}{n\ln n}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{par PAL}$$

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \frac{n\ln(n+1)+\ln(n+1)}{n\ln n}$$

$$= \frac{n\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{n\ln n} + \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{n\ln n}$$

$$= \frac{n\ln n + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ln n}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ln n}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

<u>meth</u> estimer la vitesse de convergeance d'une STP convergente

On nous donne une STP convergente et on demande un équivalent simple de $(R_n)_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)\right)_n$

1. On vérifie la convergence

2. On vérifie les hypothèses du thm comparaison $\Sigma / \int$ sur $[n+1, +\infty[$

3. on l'applique entre $n+1$ et N

4. TdG

ex estimer la vitesse de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. La série converge d'après Riemann $(\alpha = 2 > 1)$

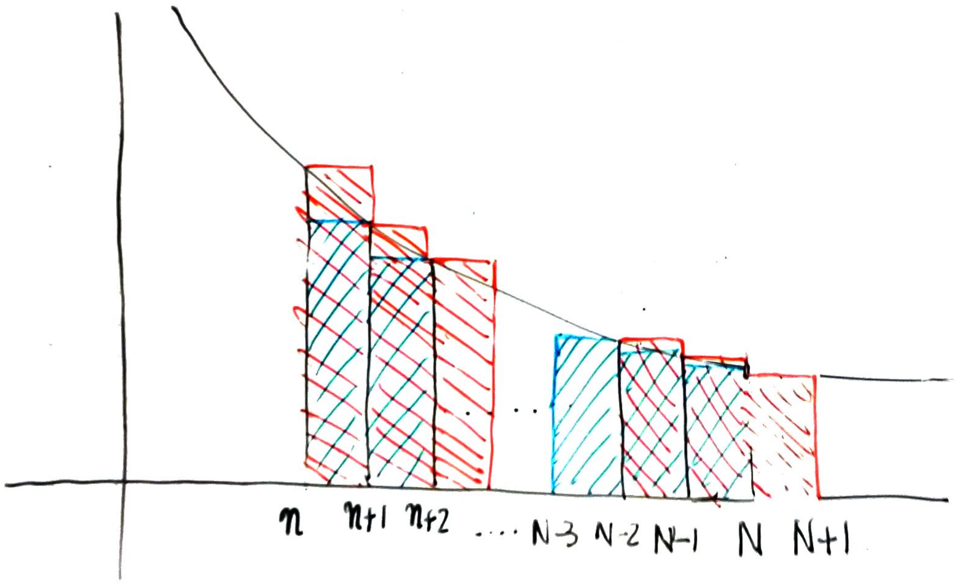
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons

$$f : \begin{cases} [n+1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

On a bien

- $f \in \mathcal{C} \supset \mathcal{C}_{pm}$
- $f \geq 0$
- $f \in \underline{\searrow} \supset \underline{\searrow}$

3. D'après le théorème de comparaison $\sum / \int$, on a, pour tout $N \geq n+1$



$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{\mathrm{id}^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{N} \frac{1}{\mathrm{id}^2}$$

$$\text{ie } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \left[\frac{-1}{\mathrm{id}}\right]_n^N = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

Pour $N \longrightarrow +\infty$, on obtient

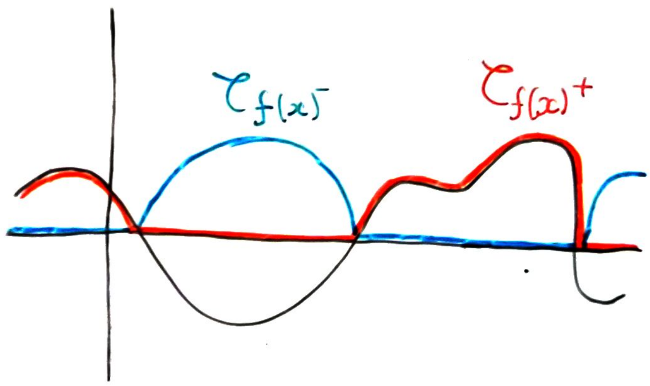
$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

4. D'où $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{R_n}{\frac{1}{n}} \leq 1$

d'où $R_n \sim \frac{1}{n}$

III Série à termes dans $\mathbb{K}$

1 Convergence absolue



notn
- $x^+ := \max(0, x)$
- $x^- := \max(0, -x)$

remq
- $x^+ + x^- = |x|$
- $x^+ - x^- = x$
- $x^+, x^- \leq |x|$

<u>def</u> convergence absolue de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ convergence}$$

<u>thm</u>

$$\text{convergence absolue} \Rightarrow \text{convergence}$$

<u>remq</u>

⚠ La réciproque n'est pas vraie

<u>ex</u>

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$ d'après l'ITL

alors que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ <u>diverge</u>!

<u>dem</u>

On suppose $\sum |u_n|$ converge

<u>1er cas</u> ($u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$):

$$\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^+ \text{ STP} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^+ \leq |u_n| \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \end{cases}$$

Par PdC, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n^+$ converge

Or $u_n = u_n^+ - u_n^-$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n^- \quad \text{STP} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n^+ \leq |u_n| \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \end{cases}$$

Par PdC, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n^-$ converge.

Par linéarité de la somme,

$\sum u_n$ converge

<u>2e cas</u> $(u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{Re}\, u_n| \quad \text{STP} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ |\mathrm{Re}\, u_n| \leq |u_n| \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \end{cases}$$

Par PdC, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{Re}\, u_n|$ converge

D'après le <u>1er cas</u> $(u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}(u_n)$ converge

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{Im}\, u_n| \quad \text{STP} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ |\mathrm{Im}\, u_n| \leq |u_n| \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \end{cases}$$

Par PdC $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\text{Im } u_n|$ converge.

D'après le 1er cas ($u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), $\sum \text{Im } u_n$ converge

Par linéarité de la somme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{Re } u_n + i \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{Im } u_n \quad \text{converge}$$

rmq Hors programme

Un "espace" dans lequel $CVA^1 \Rightarrow CV$ s'appelle un espace complet

Le théorème indique donc que "$\mathbb{K}$ est complet"

⚠ Mais "$\mathbb{Q}$ n'est pas complet"

ex $\sum^{+\infty} | \, |$ et $\sum^{+\infty}$ pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$

$$|u_n| = \frac{1}{n(n+1)} := \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

ie $\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} = A + n(\dots)\,;\ n=0 \Rightarrow \boxed{1 = A} \\ \dfrac{1}{n} = B + (n+1)(\dots)\,;\ n=-1 \Rightarrow \boxed{-1 = B} \end{cases}$

d'où $|u_n| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = 1$

De même, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

Donc $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i}$$ après changement d'indice

$$= \underbrace{2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} +}_{-\ln 2 \text{ à } \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + 1$$ d'après Chasles

Donc $S_n \longrightarrow 1 - 2\ln 2 \notin \mathbb{Q}$ donc elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$

app de la CVA

→ Nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos n}{n^2}$?

On a

$$\begin{cases} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n} \\ \sum \frac{1}{n}, \sum \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \text{ STP} \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge (Riemann; } \alpha = 2 > 1) \end{cases}$$

donc $\sum \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ converge par PdC

ie $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ CVA par définition

donc $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge

thm corollaire de la CVA et du PDC

Soit $\sum u$ tq $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

et $\sum v$ STP

On a

$$\begin{cases} u = O(v) \\ \sum u \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \sum u \text{ CVA} \Rightarrow \sum u \text{ CV}$$

2 Règle de d'Alembert

prop règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ tq $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si

- $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$
- $u \neq 0$ ÀPCR

alors

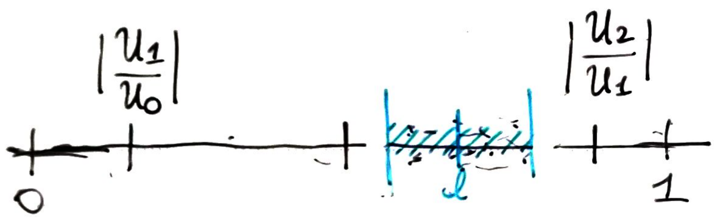
$\ell < 1$: $\sum u_n$ CVA

$\ell = 1$: ¯_(ツ)_/¯

$\ell > 1$: $\sum u_n$ DVG

dem

$\ell < 1$ Par définition de la limite :



$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - \ell \right| < \varepsilon$

Pour $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$

On trouve $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \frac{\ell+1}{2} = \ell + \varepsilon$

ie $\forall n \geq n_0, \quad |u_{n+1}| < \frac{\ell+1}{2} |u_n|$

Ainsi pour n assez grand

$$|u_n| \leq \frac{l+1}{2}|u_{n-1}|$$

$$\leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 |u_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$$

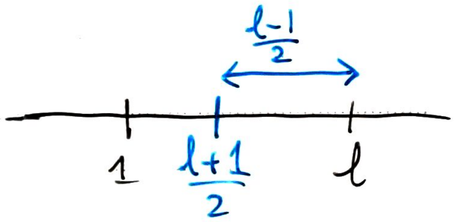
ie $|u_n| \leq q^n \cdot C$ avec $\begin{cases} q = \frac{1+l}{2} \\ C = \frac{|u_{n_0}|}{q^{n_0}} \end{cases}$

$\begin{cases} \sum |u_n|, \sum q^n \cdot C \quad \text{STP} \\ \sum q^n \cdot C \text{ converge car } q<1 \text{ et par linéarité} \\ |u_n| \leq q^n \cdot C \quad \text{APCR } n \end{cases}$

d'après le PDC, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

ie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ CVA

$l > 1$



Par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \frac{l+1}{2} = l - \varepsilon$

ie $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}| > \frac{l+1}{2}|u_n|$

Ainsi pour n assez grand

$$|u_n| \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^1 |u_{n-1}|$$

$$\geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 |u_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$\geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$$

ie $|u_n| \geq q^n \cdot C$ avec $\begin{cases} q = \frac{1+l}{2} > 1 \\ C = \frac{|u_{n_0}|}{q^{n_0}} \end{cases}$

$$q^{n_0} \cdot C \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

donc par TdG, $|u_n| \longrightarrow +\infty$

En particulier, $u_n \not\longrightarrow 0$ donc $\sum u_n$ DVG.

$l = 1$

- $\sum (-1)^n$ DVG mais $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\right| = 1 \longrightarrow 1$
- $\sum \frac{1}{n}$ $\begin{cases} \text{diverge} \\ \neg \text{DVG} \end{cases}$ mais $\sum \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ CVA mais $\sum \left|\frac{(n+1)^{-2}}{n^{-2}}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$
- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ $\begin{cases} \text{converge} \\ \neg \text{CVA} \end{cases}$ mais $\sum \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

rem

⚠ Si $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_n$ n'a pas de limite, on ne peut pas conclure.

app nature de $\sum \frac{n^n}{n!\,q^n}$

Notons $u_n := \frac{n^n}{n!\,q^n}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,q^{(n+1)}}}{\frac{n^n}{n!\,q^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}\,n!\,q^n}{(n+1)!\,q^{n+1}\,n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n q^n}{q^{n+1} n^n}$$

$$= \frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{q}$$

On retrouve

- que la série converge si $q > e$
- que la série diverge si $q < e$

⚠ mais pas que la série diverge si $q = e$

thm-def série exponentielle

Série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{où } z\in\mathbb{C}$$

Elle converge vers e^z

dem

- Convergence avec la règle d'Alembert

Pour $u_n := \dfrac{z^n}{n!}$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{z^{n}(n+1)}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

D'après d'Alembert, la série CVA

- Valeur

Notons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{tz} \end{cases}$. On a $f \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1], \mathbb{C})$, donc

d'après l'ITL,

$$|f(1) - T_n(1)| \leq \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} |f^{(n+1)}|$$

$$\text{ie } \left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \left.\boxed{\frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} e^{|z|}}\right\} \longrightarrow 0 \text{ par CC} \quad \square$$

3 Séries alternées

rpl

Il existe des séries convergentes mais pas CVA

ex

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

def série alternée

Série de terme général $\begin{cases} u_n = (-1)^n |u_n| \\ \text{ou} \\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n| \end{cases}$

prop théorème spécial sur les séries alternées (TSSA)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ telle que

critère spécial
- $\sum u_n$ est alternée
- $|u| \in \searrow$
- $u \longrightarrow 0$

alors $\sum u$ converge

app $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

- $u_n = (-1)^n |u_n| \Leftarrow u_n = (-1)^n |u_n|$
- $|u| = \frac{1}{n} \in \searrow$
- $|u| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ donc $u \to 0$

On obtiendrait de même que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge}$$

ou plus généralement que

$$\underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\text{série de Riemann alternée}} \text{ converge, } \underline{\text{avec } \alpha > 0}$$

(pour $\alpha > 1$ on le savait par CVA)

Que faire pour une série alternée qui ne vérifie pas le critère spécial ?

ex $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

ici $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

donc $\quad |u_n| = \dfrac{1}{|(-1)^n + \underbrace{\sqrt{n}}_{\substack{1,4 \\ \text{pour } n=1}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$|u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + (-1)^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$ $(n \in 2\mathbb{N})$: $\quad n := 2k$

$$|u_{n+1}| - |u_n| = |u_{2k+1}| - |u_{2k}|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k+1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2k} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2k}+1-\sqrt{2k+1}+1}{(\sqrt{2k+1}-1)(\sqrt{2k}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k+1}+2}{(\sqrt{2k+1}-1)(\sqrt{2k}+1)}$$

Or $\sqrt{2k}-\sqrt{2k+1} = \dfrac{-1}{\underbrace{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}_{\geq 1}} \geq -1$

donc $|u_{2k+1}|-|u_{2k}| > 0$

2^e cas ($n \in 2\mathbb{N}+1$) : $n = 2k-1$

$$\underbrace{|u_{2k}|}_{u_{n+1}} - \underbrace{|u_{2k-1}|}_{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2k}+1} - \frac{1}{\sqrt{2k-1}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k}-2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k-1}-1)}$$

< 0 car $\sqrt{\ } \in \nearrow$ $(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k} \leq 0)$

donc $|u| \notin \searrow$

On peut donc pas appliquer le TSSA

Effectuons un DA du terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{car } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\Big(\underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{1/n\sqrt{n}}\Big)$$

Or on sait que

- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par TSSA
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann $\alpha = 1$)
- $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ CVA donc converge d'après corollaire du PdC et de la CVA (Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + v_n$ (avec $v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$)

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{converge}} + \underbrace{v_n}_{\text{converge}}}_{\text{converge}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{diverge}}}_{\text{diverge}}$$

par linéarité

$u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

et $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

et pourtant $\sum v_n$ diverge

car ce ne sont pas des STPs !!

ex variante : nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{car } \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge par TSSA}$$

$$+ \quad \sum \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ CVA donc converge d'après le coroll PdC \& CVA}$$

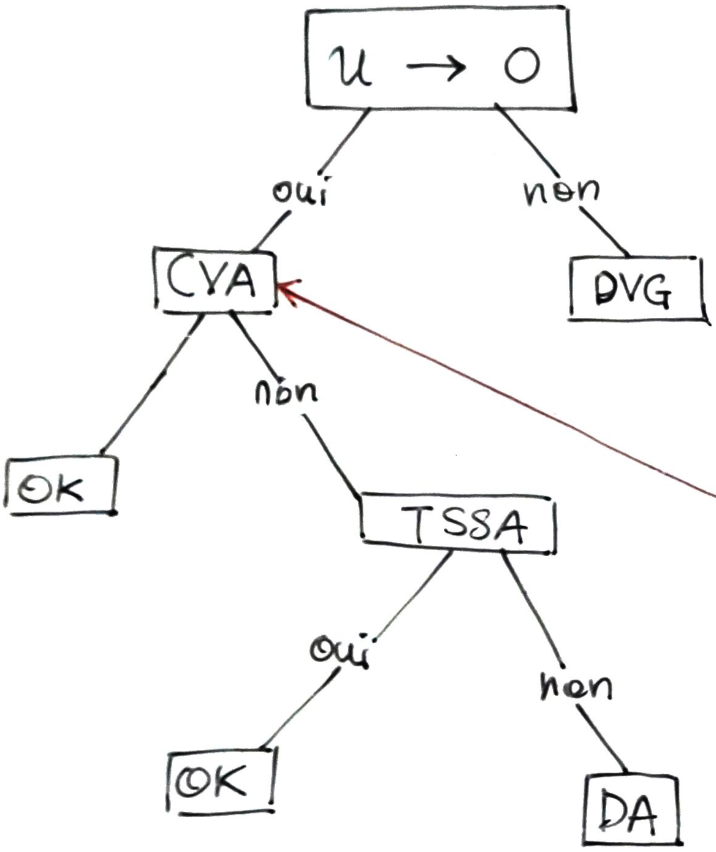
---

par linéarité $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge

ex

Voir aussi : CCINP 46

4 Plan d'étude



outils pour CVA

- Séries de référence
  - de Riemann
  - Harmonique
- PdC
- d'Alembert
- Comparaison $\sum / \int$

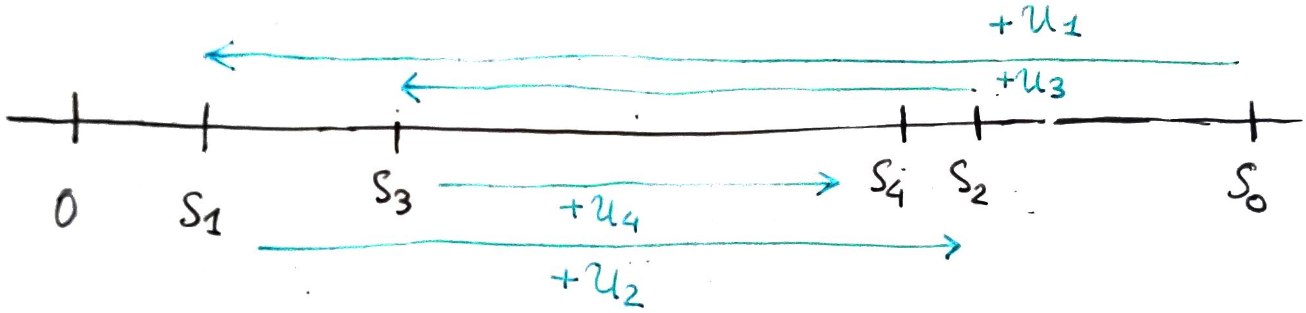
dem

Traitons le cas

$$u_n = (-1)^n |u_n|$$

Un dessin

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k |u_k|$$



Montrons que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k$$

$$= u_{2n+1} + u_{2n+2}$$

$$= (-1)^{2n+1} |u_{2n+1}| + (-1)^{2n+2} |u_{2n+2}|$$

$$= |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

$$\leqslant 0 \qquad \text{car } |u| \in \underline{\nearrow}$$

Donc $\underline{(S_{2n})_n \in \sqsupset}$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$$

$$= u_{2n+3} + u_{2n+2}$$

$$= -|u_{2n+3}| - |u_{2n+2}|$$

$$\geqslant 0 \qquad \text{car } |u| \in \sqsupset$$

Donc $\underline{(S_{2n+1})_n \in \sqsupset}$

- $$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k$$

$$= u_{2n+1}$$

$$= -|u_{2n+1}|$$

$$\longrightarrow 0 \qquad \text{par hypothèse}$$

D'après le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite ℓ.

Ainsi,

$$\begin{cases} S_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ S_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{cases}$$

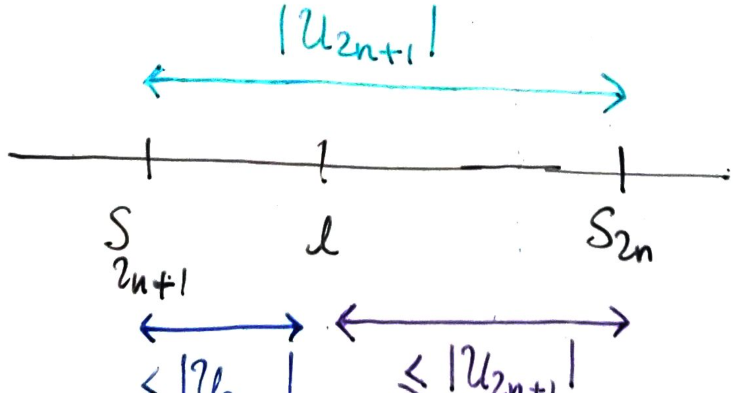
D'après le théorème pair/impair, $S_n \longrightarrow \ell$

ie $\displaystyle\sum_{n\geq 2}^{+\infty} u_k = \ell$

corolle TSSA

D'après le théorème des suites adjacentes, on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$$



donc $\begin{cases} |R_{2n+1}| = |S_{2n+1} - \ell| \leq |u_{2n+1}| \\ |R_{2n}| = |S_{2n} - \ell| \leq |u_{2n+1}| \leq |u_{2n}| \end{cases}$

Dans tout les cas,

$$|R_n| \leq |u_n|$$

IV Applications

1 Théorème du point fixe de Picard

app point fixe de Picard

Soit I un intervalle fermé (pas nécéssairement borné)

Soit $f : I \to I$ contractante[1].

1. f a un unique point fixe
2. Toute suite tq $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   converge vers ce point fixe

---

[1] k-$\mathcal{L}$ avec $k < 1$

dem

On a $f : I \to I$ contractante donc il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall (a,x) \in I^2, |f(x) - f(a)| \leq k|x-a|$

$\boxed{!}$ Considérons deux points fixes $\alpha, \beta \in I$

Ainsi $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ f(\beta) = \beta \end{cases}$

On a $|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$

ie $\underbrace{(1-k)}_{\substack{>0 \\ \text{car } k<1}} |\alpha - \beta| \leq 0$

ie $|\alpha - \beta| \leq 0$ car $1-k \neq 0$

ie $\alpha = \beta$

$\boxed{\exists}$ Soit u tel que $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Montrons que $(u_n)_n$ converge en utilisant le lien suites—séries !

u converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} u_n - u_{n-1}$ converge

Montrons que cette série CVA.

$$|u_n - u_{n-1}| = |f(u_{n-1}) - f(u_{n-2})| \leqslant k|u_{n-1} - u_{n-2}|$$
$$= k|f(u_{n-2}) - f(u_{n-3})| \leqslant k^2|u_{n-2} - u_{n-3}|$$
$$= k^2|f(u_{n-3}) - f(u_{n-4})| \leqslant k^3|u_{n-3} - u_{n-4}|$$
$$\vdots \quad \text{par récurrence immédiate}$$
$$\leqslant k^{n-1}|u_1 - u_0| = k^n C$$

où $C = \dfrac{|u_1 - u_0|}{k} \geqslant 0$

Ainsi
$$\begin{cases} \sum k^n C,\ \sum |u_n - u_{n-1}| \text{ STP} \\ \sum k^n C \text{ converge car géométrique } (|k|<1) \text{ et par lin.} \\ |u_n - u_{n-1}| \leqslant k^n C \end{cases}$$

Par PdC, $\sum |u_n - u_{n-1}|$ converge

ie $\sum u_n - u_{n-1}$ CVA

donc $\sum u_n - u_{n-1}$ converge

Donc $(u_n)_n$ converge, notons ℓ sa limite. On a bien $\ell \in I$ par CSF.

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \longrightarrow f(\ell) & \text{par CSC car } \begin{cases} f \in \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \subset \mathcal{U}\mathcal{C} \subset \mathcal{C} \end{cases} \\ u_{n+1} = \ell & \text{par chgt d'indice} \end{cases}$$

Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$

ie ℓ est bien le point fixe de f

2 Formule de Stirling

thm

1. Il existe $s > 0$ tel que $n! \sim s\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
2. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
3. $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

dem

1. On veut montrer qu'il existe $s > 0$ tel que

$$\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} s \quad \text{ie que}$$

$$\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right)_n \text{ converge vers un réel } > 0$$

Notons $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \dfrac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}}$ pour $n \geqslant 1$

va converger vers un réel >0 !

Soit $n \geq 1$. Notons $a = \ln \circ u \Leftrightarrow u = \underbrace{\exp \circ a}$

Mq u converge avec le lien suite—série

$$a_n - a_{n-1} = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$$

$$= \ln \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{n!}\, e^{\cancel{-n}} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \cancel{(n-1)!}\, e^{\cancel{n-1}}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n e (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \ln\left(e \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \ln\left(e \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \ln\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \overbrace{1}^{\ln e} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{car } \frac{1}{n} \to 0$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{12n^2}\right)$$

ie $a_{n-1} - a_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{12n^2}\right)$

ie $\begin{cases} a_{n-1} - a_n \sim \frac{1}{12n^2} \\ \sum \frac{1}{12n^2}, \sum a_{n-1} - a_n \text{ STP} \quad \text{ÀPCR car } a_{n-1} - a_n \sim \\ \sum \frac{1}{12n^2} \text{ converge d'après Riemann } (\alpha = 2) \\ \qquad \text{et par linéarité} \end{cases}$

donc

$$\sum a_{n-1} - a_n \quad \text{converge} \quad \text{par } PdC_{\sim}$$

Par linéarité $(\times -1)$,

$$\sum a_n - a_{n-1} \quad \text{converge}$$

D'après le lien suites—séries, $(a_n)_n$ converge vers ℓ

donc car $\exp \in \mathcal{C}$

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{\ell} > 0 \quad \text{car } \exp > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

2. Mq $S = \sqrt{2\pi n}$ en utilisant les intégrales de Wallis $\left(\int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \, dt \right)_n =: W_n$

On a $\begin{cases} W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ W_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \end{cases}$

En particulier,

$$W_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{\pi}{2}$$

Et par ailleurs,

$$W_{2p} \sim \frac{S\sqrt{2p} \cancel{\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}}{\cancel{2^{2p}} S^2 p \cancel{\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}} \frac{\pi}{2}$$

$$\sim \frac{\sqrt{2}}{S\sqrt{p}} \frac{\pi}{2} \qquad \text{stab de } \sim \text{ par } \times \text{ et } \div$$

Par transitivité de $\sim$,

$$\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \frac{\pi}{S\sqrt{2p}} \quad \text{donc} \quad S \sim \frac{\pi\sqrt{4p}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2p}} = \sqrt{2\pi}$$

d'où $S = \sqrt{2\pi}$ (car deux constantes équivalentes sont égales)

3.

$$u_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \longrightarrow e^l = S = \sqrt{2\pi}$$

$a_n := \ln(u_n)$

$\sum a_n - a_{n-1}$ converge (vers $l - a_1$)

Notons R_n sont reste d'ordre n

ie $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - a_{k-1}$

$$= \left(\sum_{k=2}^{+\infty} a_k - a_{k-1}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} a_k - a_{k-1}\right)$$

$$= l - a_n$$

ie $a_n = l - R_n$

rpl application du théorème $\Sigma / \int$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{12k^2} \sim \frac{1}{12n}$$

Mq. $-R_n \sim \frac{1}{12n}$.

$$-R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_{k-1} - a_k \quad \text{et} \quad a_{k-1} - a_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{12k^2}$$

ie il existe $(\gamma_k)_k$ tq $\begin{cases} a_{k-1} - a_k = \frac{1}{12k^2}\gamma_k \\ \gamma \longrightarrow 1 \end{cases}$

$$\left(\inf_{k\geq n+1} \gamma_k\right)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{12k^2} \leq -R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{12k^2}\gamma_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{12k^2} \cdot \left(\sup_{k\geq n+1} \gamma_k\right)$$

Or $\gamma \longrightarrow 1$ donc $\inf_{k\geq n+1} \gamma_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\forall \varepsilon, \exists n_0, \forall n \geq n_0,\ 1-\varepsilon < \gamma_n < 1+\varepsilon$

Si $n \geq n_0$, $n+1 \geq n_0$ donc $k \geq n+1 \geq n_0$

$\inf_{k\geq n+1} \gamma_k \longrightarrow 1$ par définition de la limite.

De même, $\sup_{k\geq n+1} \gamma_k \longrightarrow 1$

Par TdG, $-R_n \sim \frac{1}{-12n}$

$$u_n = e^{a_n} = e^{\ell - R_n} = e^{\ell} e^{-R_n} = s e^{-R_n} = \sqrt{2\pi}\, e^{-R_n} = \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{12n}\right)}$$

car $-R_n \sim \frac{1}{12n}$

donc $u_n = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

ie $\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

ie $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\square$