$\boxed{1}$

$$f_n := \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + \ln x - n \end{cases}$$

On cherche à mtq $\exists!$ solution $x_n \in]0, +\infty[$ de

$f_n(x_n) = 0$

- $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \dots)$ par thm généraux
- $f_n \in \nearrow$
- $f_n \xrightarrow[0^+]{} -\infty$ et $f_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$

En effet $f_n \in \mathcal{D}$ par thm généraux

et $f_n' = 1 + \frac{1}{\mathrm{id}} > 0$ et $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle

donc TSD $f_n \in \nearrow$

D'après le théorème de la bij. $\exists! \, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tq $f_n(x_n) = 0$

$\boxed{2}$

Meth On cherche le signe de $f_n(x_n)$

- Si $f_n(x_{n+1}) < 0 = f_n(x_n)$ car $f_n \in \nearrow$: $u_{n+1} < u_n$

- Si $f_n(U_{n+1}) > 0 = f_n(U_n)$

$f_n \in \nearrow$ donc $U_{n+1} > U_n$

idée exprimer $f_n(U_{n+1})$ en fonction de $f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$

$$f_n(x) = x + \ln x - (n+1) + 1 = f_{n+1}(x) + 1$$

$$f_n(U_{n+1}) = f_{n+1}(U_{n+1}) + 1 = 1 > 0 = f_n(U_n)$$

donc $U_{n+1} > U_n$ car $f_n \in \nearrow$

d'où $u \in \nearrow$

Par TLM_∞, u a une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Mq $u \longrightarrow +\infty$ par l'absurde

Sinon u convergerait, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n + \ln(U_n) = n$

En passant à la limite, $\ell + \ln(\ell) = +\infty$ imp

d'où $u \longrightarrow +\infty$

$\boxed{3}$ $u \longrightarrow +\infty$ donc $\dfrac{\ln \circ u}{u} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par CC

ie $\ln \circ u = o(u)$

On a $n = U_n + \ln(U_n)$ donc $n = U_n + o(U_n)$

d'après $\sim \Leftrightarrow o(\dots)$: $n \sim U_n$ donc $U_n \sim n$

— On cherche un équivalent simple de $u_n - n$

$$y_n := u_n - n \Leftrightarrow u_n = n + y_n$$

On a $$u_n + \ln(u_n) = n$$

$$\Leftrightarrow n + y_n + \ln(n + y_n) = n$$

$$\Leftrightarrow y_n = -\ln(n + y_n)$$

avec $y_n = o(n)$

$$= -\ln\left(n\left(1 + \frac{y_n}{n}\right)\right)$$

$$= -\ln(n) - \underbrace{\ln\Big(\underbrace{1 + \underbrace{\frac{y_n}{n}}_{\to 0}}_{\to 1}\Big)}_{\to 0}$$

or $y_n = o(n)$ donc $\ln\left(1 + \frac{y_n}{n}\right) \xrightarrow[\infty]{} 0$

donc $y_n = -\ln(n) + o(1)$

En particulier $y_n = -\ln n + o(\ln n)$ par T de $o(\dots)$

D'ap $\sim \Leftrightarrow o(\dots)$: $y_n \sim -\ln(n)$

DA 2 termes: $u_n = n - \ln n + o(\ln n)$

Mieux: $u_n = n - \ln n + o(1)$

— On cherche $u_n - n + \ln n$

Pour $z_n := u_n - n + \ln n \Leftrightarrow u_n = n - \ln n + z_n$

On a $u_n + \ln(u_n) = n$

$\Leftrightarrow n + \ln n + z_n + \ln(n - \ln n + z_n) = n$

$\Leftrightarrow z_n = \ln n - \ln(n - \ln n + z_n)$

$$= \ln\left(\frac{n}{n - \ln n + z_n}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{n - \ln n + z_n}{n}\right)$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{z_n}{n}\right)$$

or $z_n = o(\ln n) = o(1)$

Par CC $-\frac{\ln n}{n} + \frac{z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $z_n = -\left(-\frac{\ln n}{n} + \frac{z_n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$ DL de $\ln(1+x)$ avec $x = -\frac{\ln n}{n} + \frac{z_n}{n}$

donc $z_n = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

DA 3 termes

$$u_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$\boxed{4}$ $f_n := \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + nx - 1 \end{cases}$

Mq $\exists! v_n \in [0,1]$ tq $f_n(u_n) = 0$ $\begin{cases} f_n \in (\mathcal{C} \cap \nearrow)([0,1]) \\ \overrightarrow{f_n}([0,1]) = [-1, 1] \end{cases}$

d'après le théorème de la bijection, il existe un unique

$v_n \in [0,1]$ tq $f_n(v_n) = 0$

Notons f_n le prolongement naturel à $\mathbb{R}$.

De plus, $f_n \in \nearrow$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f_n(x) \leq f_n(0) < 0$

donc pas de racines sur $\mathbb{R}_-$

De même $\forall x \in [1, +\infty[$, $f_n(x) \geq f_n(1) > 0$

donc pas de racines sur $[1, +\infty[$

Ainsi: v_n est aussi l'unique racine de f_n sur $\mathbb{R}$.

On a $f_n(v_n) = v_n^3 + n v_n - 1 = 0$

$$f_n(x) = x^3 + (n+1)x - 1 - x = f_{n+1}(x) - x$$

Donc $f_n(v_{n+1}) = f_{n+1}(v_{n+1}) - v_{n+1} = -v_{n+1} < 0$

$= f_n(v_n)$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$

$f_n \in \nearrow$ donc $v_{n+1} < v_n$ donc $v \in \searrow$

$\boxed{5}$ $v \in \searrow$ et v minorée par 0 donc v converge par CSF vers $l \in [0, 1]$

Montrons que $l = 0$ par l'absurde. Sinon on aurait $l > 0$

donc $v_n^3 + n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par PAL donc $1 = +\infty$

par unicité de la limite

donc $v \to 0$

$\boxed{6}$ $v \to 0$ donc $v = O(1)$

$$n v_n = 1 - v_n^3 \longrightarrow 1 \quad \text{par PAL}$$

$$n v_n = v_n \times \frac{1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \text{ donc } v_n \sim \frac{1}{n}$$

$y_n := v_n - \frac{1}{n}$ On reinjecte $v_n = \frac{1}{n} + y_n$

$$\left(\frac{1}{n} + y_n\right)^3 + n\left(\frac{1}{n} + y_n\right) = 1 \quad \text{avec } y_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^3} + \frac{3y_n}{n^2} + \frac{3y_n^2}{n} + n y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow y_n = -\frac{1}{n^4} - \underbrace{\frac{3y_n}{n^3}}_{o\left(\frac{1}{n^4}\right)} - \underbrace{\frac{3y_n^2}{n^2}}_{o\left(\frac{1}{n^4}\right)} = -\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$y_n \sim -\frac{1}{n^4}$$