Relations de comparaison sur les suites et les fonctions

Comparaisons de suites et de fonctions

Exercice 1. On considère les fonctions $f : x \mapsto x^x$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2^x$.

1. Donner toutes les relations de comparaison qui existent entre f, g et h en $+\infty$.
2. Donner toutes les relations de comparaison qui existent entre f, g et h en 0^+.

Exercice 2.

1. Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = o(u_n)$?
2. Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = o(u_n)$?
3. Que dire d'une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = o(u_{n+1})$?
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n+u_{n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, montrer qu'on a $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Contre-exemple si pas décroissante ?
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$, montrer qu'on a $u_n \sim \frac{1}{2n}$. Contre-exemple si pas décroissante ?

Équivalents

Exercice 3. Donner un **équivalent simple** des fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $\dfrac{(x^3+x)\sqrt[3]{\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\tan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)}$ en $+\infty$;
2. $\dfrac{\arctan(x)^2 - \arctan(x^2)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \ln(1+x)$ en $+\infty$;
3. $x \mapsto \sin(3x)$ en 0 puis en $\dfrac{\pi}{3}$;
4. $\dfrac{E(x^3)+2x^2+3}{2x^3+E(x^2)-2}$ en 0^+, puis en 0^-, puis en $+\infty$.

Exercice 4. *Équivalent de* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

L'objectif de cet exercice est de trouver un équivalent simple de la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que les suites de termes généraux $u_n = S_n - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$ convergent vers la même limite.
2. En déduire un équivalent de S_n.
3. Aurait-on pu trouver cet équivalent autrement ?

Exercice 5. *Généralisation de l'exercice précédent.* Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Montrer qu'on a, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'inégalité $\dfrac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leqslant (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leqslant \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$
2. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 6. *Équivalent de* $\zeta(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (Bac Roumanie 2002)

Dans cet exercice, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On a vu qu'on avait $u_n \to \dfrac{\pi^2}{6}$, l'objectif est maintenant de trouver un équivalent simple de la suite de terme général $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n$.

1. On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ et $b_n = u_n + \dfrac{1}{n+1}$.
   Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'on a $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

EX^{M} RELCOMP $\boxed{1/1+2}$ Soit $x = id_{\mathbb{R}}$

est un ... de ... → ↓		f $+\infty$	f 0	g $+\infty$	g 0	h $+\infty$	h 0
f	O	oui	oui	non	non	non	oui
	o	non	non	non	non	non	non
	$\sim$	oui	oui	non	non	non	oui
g	O	oui	oui	oui	oui	oui	oui
	o	oui	oui	non	non	oui	oui
	$\sim$	non	non	oui	oui	non	non
h	O	oui	oui	non	non	oui	oui
	o	oui	non	non	non	non	non
	$\sim$	non	oui	non	non	oui	oui

$$\frac{f}{g} = \frac{x^x}{x^2} = x^{x-2} \xrightarrow[\infty]{} +\infty$$

$$\frac{f}{h} = \left(\frac{x}{2}\right)^x \xrightarrow[\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \frac{h}{f} \to 0$$

$$\frac{g}{h} = \frac{x^2}{2^x} = \frac{e^{2\ln}}{e^{x\ln 2}} = e^{2\ln x - x\ln 2} = e^{x\left(2\frac{\ln}{x} - \ln 2\right)}$$

$$\frac{g}{f} = \frac{x^2}{x^x} = x^{2-x} \xrightarrow[0^+]{} 0$$

$$\frac{g}{h} = \frac{x^2}{2^x} \xrightarrow[0^+]{} 0 \quad \text{par PAL}$$

or $2\frac{\ln}{x} - \ln 2 \to -\ln 2$ par CC & PAL

donc $x\left(2\frac{\ln}{x} - \ln 2\right) \to -\infty$ car $\ln 2 > 0$

d'où $\frac{g}{h} \to 0$ par composition

$$\Rightarrow \frac{h}{g} \to +\infty$$

$$f = e^{x\ln} \xrightarrow[0^+]{} 1$$

$$\frac{f}{g} = \frac{e^{x\ln}}{x^2} \xrightarrow[0^+]{} +\infty$$

$$\frac{g}{f} \xrightarrow[0^+]{} 0$$

$$\frac{f}{h} = \left(\frac{x}{2}\right)^x = e^{x\ln\circ\frac{x}{2}} = e^{2\left(\frac{x}{2}\ln\circ\frac{x}{2}\right)} \xrightarrow[0]{} e^0 = 1 \quad \text{par } e$$

car $\frac{x}{2}\ln\circ\frac{x}{2} \to 0$ par CC

Relations de comparaison – Corrigé

Exercice 2.

1. Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = o(u_n)$?

   Ce que je peux en dire : il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ de limite nulle telle que $u_n = u_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang, disons n_1. Et donc à partir du rang n_1 on a $(1-\varepsilon_n)u_n = 0$, mais on a $1-\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc à partir d'un certain rang, disons n_2, on a $1-\varepsilon_n \neq 0$.

   À partir du rang $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on peut donc diviser par $1-\varepsilon_n$ l'égalité $(1-\varepsilon_n)u_n = 0$, et finalement on peut conclure que $\boxed{(u_n)_n \text{ est nulle APCR}}$.

2. Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = o(u_n)$?

   Ce que je peux en dire : il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ de limite nulle telle que $u_{n+1} = u_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang, disons n_1. Pour tout réel $\eta > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un rang, disons n_2, à partir duquel on a $|\varepsilon_n| \leqslant \eta$.

   À partir du rang $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a donc : $u_n \leqslant \eta u_{n-1} \leqslant \dots \leqslant \eta^{n-n_0}u_{n_0} = C\eta^n$ en notant $C = \frac{u_{n_0}}{\eta^{n_0}}$.

   Et donc $\boxed{(u_n)_n \text{ tend vers 0 plus vite que toute suite géométrique}}$.

3. Que dire d'une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = o(u_{n+1})$?

   Pareil. Pour tout $q > 0$ (aussi grand soit-il), on obtient un réel C et un rang n_0 à partir duquel $|u_n| \geqslant Cq^n$ donc $\boxed{(|u_n|)_n \text{ tend vers } +\infty \text{ plus vite que toute suite géométrique}}$.

   Pour le signe de $(u_n)_n$, par contre, on ne peut rien dire.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n+u_{n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, montrer qu'on a $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Contre-exemple si pas décroissante ?

   - Considérons une telle suite $(u_n)_n$. Pour tout entier n on a $u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n+2}$ et donc, en multipliant par $\frac{n}{2}$: $\frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) \leqslant nu_n \leqslant \frac{n}{2}(u_{n+1} + u_{n+2})$.

     On a $u_n + u_{n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui signifie $n(u_n + u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par PAL $\frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

     Par ailleurs, $n(u_n+u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique aussi $(n+1)(u_{n+1}+u_{n+2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par exemple avec le théorème fondamental sur les sous-suites) et donc par PAL $\frac{n}{2}(u_{n+1} + u_{n+2}) = \frac{n}{2(n+1)}(n+1)(u_{n+1} + u_{n+2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

     Finalement, par TdG, on a bien $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *i. e.* $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   - Contre-exemple : on prend une suite qui change de signe, par exemple la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Pour tout entier n on a $u_n + u_{n+1} = (-1)^n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ et $\frac{(-1)^n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   - Remarque : la décroissance n'est pas nécessaire ici, une suite positive vérifiant l'hypothèse vérifie nécessairement la conclusion. En effet, pour une telle suite on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_n + u_{n+1}$ et donc $0 \leqslant nu_n \leqslant n(u_n + u_{n+1})$ donc par TdG $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *i. e.* $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$, montrer qu'on a $u_n \sim \frac{1}{2n}$. Contre-exemple si pas décroissante ?

   - Je copie-colle. Considérons une telle suite $(u_n)_n$. Pour tout entier n on a $u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n+2}$ et donc $n(u_n + u_{n+1}) \leqslant \dfrac{u_n}{\frac{2}{n}} \leqslant n(u_{n+1} + u_{n+2})$.

     On a $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ ce qui signifie $n(u_n + u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par PAL $n(u_n + u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

     Par ailleurs, $n(u_n+u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique aussi $(n+1)(u_{n+1}+u_{n+2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par exemple avec le théorème fondamental sur les sous-suites) et donc par PAL $n(u_{n+1} + u_{n+2}) = \frac{n}{n+1}(n+1)(u_{n+1} + u_{n+2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

     Finalement, par TdG, on a bien $\dfrac{u_n}{\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *i. e.* $u_n \sim \frac{2}{n}$.
   - Contre-exemple : $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2n}$ (elle vaut $\frac{1}{n}$ si n est impair et 0 si n est pair). Pour tout entier n on a $u_n + u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \in 2\mathbb{N}+1 \\ \frac{1}{n+1} \text{ si } n \in 2\mathbb{N} \end{cases}$ et donc $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ mais on n'a pas $u_n \sim \frac{2}{n}$ puisque le quotient ne tend pas vers 1 (la sous-suite des termes impairs tend vers 2 et celle des termes pairs est nulle).

$\boxed{3/1}$

remq Deux outils

1. $\sim$ est stable par $\times, \div, \cdot^{\alpha}$
2. pour les somes : $f + o(f) \sim f$

- $x^3 + x \underset{\infty}{\sim} x^3$
- $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x^6}\right) = \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^6}$ car $\frac{1}{x^6} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- $\mathrm{atan}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$
- $\tan \circ \exp \circ (-\mathrm{id}) = \exp \circ (-\mathrm{id}) + o(\exp \circ -\mathrm{id}) \sim \exp \circ -\mathrm{id}$

par stabilité par $\times, \div, \cdot^{\alpha}$

$$\frac{(x^3+x)\sqrt[3]{\mathrm{sh}\,\frac{1}{x^6}}\;\mathrm{atan}\,\frac{1}{x}}{\tan\left(e^{-x}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x\left(\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}}{e^{-x}}$$

$$= e^{x}$$

$\boxed{3/3}$

- $\sin(3x) = 3x + o(x) \underset{0}{\sim} 3x$ car $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\sin(3x)$ en $\frac{\pi}{3}$?

On pose $x := \frac{\pi}{3} + t \iff t = x - \frac{\pi}{3}$

$$\sin(3x) = \sin\left(3\left(\frac{\pi}{3}+t\right)\right) = \sin(\pi + 3t)$$
$$= -\sin(3t)$$
$$\sim -3t \quad \text{car } 3t \to 0$$

ie $\sin(3x) \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} -3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{3/2}$

$$\frac{\operatorname{atan}^2 - \operatorname{atan}\circ \mathrm{id}^2}{\sqrt{\mathrm{id}+1} - \sqrt{\ }} + \ln \circ (\mathrm{id}+1)$$

- $\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ car $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln(x(1+\frac{1}{x}))}{\ln x}$

$$= \frac{\ln x}{\ln x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} 1 \quad \text{par PAL}$$

- $\frac{\operatorname{atan}^2 - \operatorname{atan}\circ \mathrm{id}^2}{\sqrt{\mathrm{id}+1} - \sqrt{\ }} = (\sqrt{\mathrm{id}+1} - \sqrt{\ })(\operatorname{atan}^2 - \operatorname{atan}\circ\mathrm{id}^2)$

  - $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \sim 2\sqrt{x}$ car $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 1\right)$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

  - $\operatorname{atan} \xrightarrow[\infty]{} \frac{\pi}{2}$ par PAL, $\operatorname{atan}^2 - \operatorname{atan}\circ\mathrm{id}^2 \xrightarrow[\infty]{} \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$

    donc $\operatorname{atan}^2 - \operatorname{atan}\circ\mathrm{id}^2 \sim \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$

d'où $\frac{\operatorname{atan}^2 - \operatorname{atan}\circ \mathrm{id}^2}{\sqrt{\mathrm{id}+1} - \sqrt{\ }} \sim \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi\right)\sqrt{x}$ par stabilité du produit

ici $\ln(x) = o(\sqrt{x})$

donc $\ln x = o\left(\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right)\sqrt{x}\right)$

donc $\ln(x+1) = o\left(\frac{\operatorname{atan}(x)^2 - \operatorname{atan} x^2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}\right)$

donc $\frac{\operatorname{atan}(x)^2 - \operatorname{atan} x^2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} + \ln(x+1) = \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right)\sqrt{x} + \underbrace{o(\sqrt{x}) + o(\sqrt{x})}_{o(\sqrt{x})}$

$\sim \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right)\sqrt{x}$

$\boxed{3/4/0^+}$ Au voisinage de 0^+

$\lfloor x^3 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor = 0$

donc machin $= x \mapsto \dfrac{2x^2+3}{2x^3-2} \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{3}{2}$

$\boxed{3/4/0^-}$ Au voisinage de 0^-

$\lfloor x^3 \rfloor = -1 ;\ \lfloor x^2 \rfloor = 0$

donc $\dfrac{\lfloor x^3 \rfloor + 2x^2 + 3}{2x^3 + \lfloor x^2 \rfloor - 2} \underset{0^-}{\sim} \dfrac{-1+3}{-2} = -1$

$\boxed{3/4/+\infty}$

$x^3 - 1 \leq \lfloor x^3 \rfloor \leq x^3$

d'où $x^3 + 2x^2 + 2 < \lfloor x^3 \rfloor + 2x^2 + 2 \leq x^3 + 2x^2 + 3$

Par TdG, $\lfloor x^3 \rfloor + 2x^2 + 3 \underset{+\infty}{\sim} x^3$

$x^2 - 1 < \lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$

d'où $\dfrac{2x^3 + x^2 - 3}{2x^3} < \dfrac{2x^3 + \lfloor x^2 \rfloor - 2}{2x^3} \leq 1$

Par TdG, $2x^3 + \lfloor x^2 \rfloor - 2 \sim 2x^3$

Par stabilité par $\div$, $P(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$

$\boxed{4/1}$

$$u_n - v_n = S_n - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n}$$
$$= 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$
$$= \frac{2(n - n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{par PAL}$$

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - 2\sqrt{n+2} - S_n + 2\sqrt{n+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\,\frac{n+1-(n+2)}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1} \Rightarrow \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{2}{2\sqrt{n+1}}$$
$$\Rightarrow u \in \nearrow$$

$$v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\,\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{2}{2\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow v \in \searrow$$

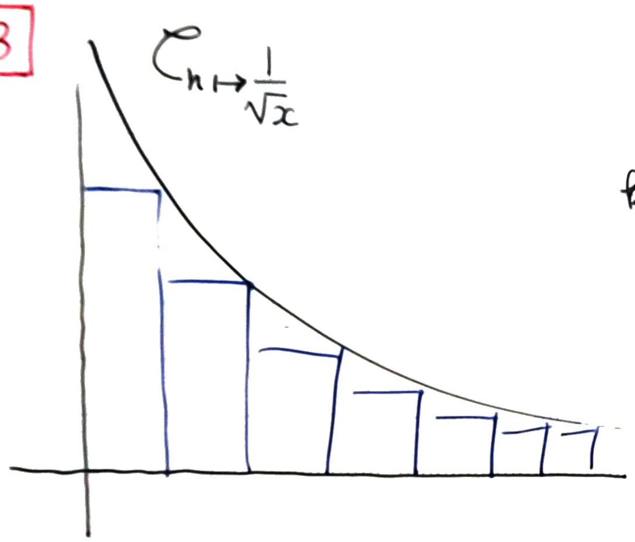
On a u, v adjacentes

donc u, v convergent vers une même limite ℓ

$\boxed{4/2}$ $u_n = S_n - 2\sqrt{n} \longrightarrow \ell$

$$\frac{S_n}{2\sqrt{n}} - 1 \longrightarrow 0 \quad \text{ie} \quad \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 1 \quad \text{ie} \quad S_n \sim 2\sqrt{n}$$

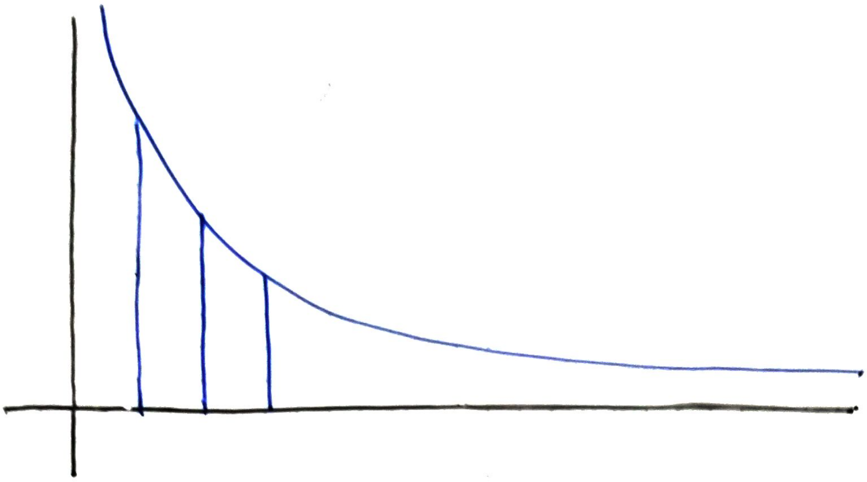
$\boxed{4/3}$



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{\int \frac{2\,dx}{2\sqrt{x}}}_{2\left[\sqrt{n}\right]_0^n}$$

EXMRELCOMP

$\boxed{5/1}$



Soit $k \in [\![1, n]\!]$

Pour $x \in [k, k+1]$, $\quad \dfrac{1}{x^k} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$

$$\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^k} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \int_k^{k+1} dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{x=k}^{k+1} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leqslant \frac{1-\alpha}{k^\alpha} \qquad \text{car } 1-\alpha > 0$$

<u>De même</u> $\quad \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \int_k^{k+1} dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\iff \frac{1-\alpha}{(k+1)^{\alpha}} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$$

$\boxed{5/2}$ Les inégalités sont stables par somme donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

Après télescopage, on obtient :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq S_n$$

En remarquant que l'inégalité $\frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ reste vraie pour $k = 0$ et en sommant pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 0$$ après télescopage.

Finalement, pour tout n

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

D'où

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1$$

Or $\quad \dfrac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{n^{1-\alpha}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1-\alpha}$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1-0=1 \quad \text{par PAL et car } id^{1-\alpha} \in \mathcal{C}$$

Par TdG $\quad \dfrac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\Leftrightarrow \quad S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

eg c'est bien une généralisation du 4

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$$

$\boxed{6}$

$$u := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \qquad u \in \nearrow \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{\pi^2}{6} - u_n \sim \ ?$$

$$\begin{cases} a_n = u_n + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{\pi^2}{6} \\ b_n = u_n + \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{\pi^2}{6} \end{cases}$$

- $$a_{n+1} - a_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + n^2 + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

$$\Rightarrow a \in \searrow$$

- $$b_{n+1} - b_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+2} - u_n - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+2 + (n+1)^2 - (n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{n+2+n^2+2n+1-n^2-3n-2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \Rightarrow b \in \nearrow$$

- $a - b = \left(\left(u_n + \frac{1}{n}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{par PAL}$$

a et b adjacentes donc elles convergent vers la même limite $\frac{\pi^2}{6}$ <u>en l'encadrant</u>

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; b_n \leq \frac{\pi^2}{6} \leq a_n$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n + \frac{1}{n+1} \leq \frac{\pi^2}{6} \leq u_n + \frac{1}{n}$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \frac{1}{n+1} \leq \frac{\pi^2}{6} - u_n \leq \frac{1}{n}$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \leq \frac{\frac{\pi^2}{6} - u_n}{\frac{1}{n}} \leq \underbrace{1}_{\to 1}$

ie $\frac{\frac{\pi^2}{6} - u_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

par déf, $\frac{\pi^2}{6} - u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Développements asymptotiques

Exercice 7. Donner un développement asymptotique à trois termes de $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 8. *Constante d'Euler*

On rappelle qu'on a, pour tout réel $x > 0$, l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$. On note $(H_n)_{n\in\mathbb{R}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ les suites définies par $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. Déterminer les limites de $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{3n} \dfrac{1}{k}$ et $\sum\limits_{k=n+1}^{n^2} \dfrac{1}{k}$.
   Comment peut-on faire pour les deux premières sans utiliser ce qui précède ?

`Le nombre` γ `s'appelle la constante d'Euler.`

Exercice classique : DA de l'unique solution d'une équation

Exercice 9. *Points fixes de la fonction tangente.*

1. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
   Indication : que sait-on sur la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *?*
2. Montrer que, pour tout entier n, il existe un unique réel $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ tel que $tan(x_n) = x_n$.
3. Justifier qu'on a $x_n \sim n\pi$.
4. Exprimer x_n en fonction de $\arctan(x_n)$ puis montrer qu'on a $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)$.
5. Justifier qu'on a $\arctan(x_n) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{3x_n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
6. En déduire un développement asymptotique à quatre termes de x_n.

Exercice 10. *Comme en TD mais en encore pire*

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note (E_n'') l'équation $x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x = 1 \quad (E_n'')$

1. Montrer que l'équation (E_n'') possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ainsi définie.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge.
4. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{2}$.
   Indication : on pourra montrer qu'on a $\frac{1}{2^{n+2}} \leqslant x_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

EX$^{\underline{M}}$ RELCOMP

$\boxed{7}$

$$\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$= \frac{\ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n}$$

$$= \boxed{\frac{\ln n}{n}} + \boxed{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$-\frac{\ln n}{n+1} = \frac{-\ln n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= -\frac{\ln n}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\ln n}{n}} + \boxed{\frac{\ln n}{n^2}} \boxed{-\frac{\ln n}{n^3}} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} = \underbrace{\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}_{} \underbrace{- \frac{\ln n}{n^3}}_{} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

Exercice 8. *Constante d'Euler*

On rappelle qu'on a, pour tout réel $x > 0$, l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$. On note $(H_n)_{n\in\mathbb{R}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ les suites définies par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ sont adjacentes.

   Comme dans l'exercice 6.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. D'après le rappel on a $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
     Ceci étant vrai pour tout entier n, on a $(u_n)_n$ croissante.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. D'après le rappel on a $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
     Ceci étant vrai pour tout entier n, on a $(v_n)_n$ décroissante.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n - v_n = H_n - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par continuité de ln en 1.

   On a bien montré que les deux suites sont adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers une même limite.

2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

   Notons γ la limite commune des deux suites, qui est donc en particulier la limite de $(v_n)_n$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$ *i. e.* $v_n = \gamma + o(1)$ *i. e.* $H_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$ *i. e.* $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3. Déterminer les limites de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k}$.
   Comment peut-on faire pour les deux premières sans utiliser ce qui précède ?

   On utilise notre bonne amie la relation de Chasles.
   $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \big(\ln(2n) + \gamma + o(1)\big) - \big(\ln(n) + \gamma + o(1)\big) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln(2) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.
   De même : $\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} = H_{3n} - H_n = \ln(3) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3)$ et $\sum_{k=n+1}^{n^2} H_{n^2} - H_n = \ln(n) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Faire autrement pour les deux premières : on peut comparer la somme à une intégrale ou, mieux, directement remarquer que la somme est une somme de Riemann. Pour la troisième : on ne peut pas directement ramener la somme à une somme de Riemann mais on peut conclure en la comparant à une intégrale.

Exercice 9. *Points fixes de la fonction tangente.*

1. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
   Indication : que sait-on sur la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *?*

   Pour $x > 0$, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $\arctan(n) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (DL usuel).

2. Montrer que, pour tout entier n, il existe un unique réel $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ tel que $tan(x_n) = x_n$.

   Posons $f = x \mapsto \tan(x) - x$. On a $D_f = D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Sur D_f on a f dérivable par théorème généraux et $f' = x \mapsto \tan^2(x) \geqslant 0$. Sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, la dérivée de f est positive, et même strictement positive sauf en $k\pi$. Ainsi, chaque $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ est un **intervalle** sur lequel la fonction f a une dérivée **strictement positive sauf en un nombre fini de points**, et par conséquent, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles. Par somme, on a $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} f(x) = -\infty$.

   On a $\tan(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. Sur chaque l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après l'étude précédente). De plus on a $0 \in]-\infty, +\infty[= \left]\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} f(x),\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} f(x)\right[$.

D'après le théorème de la bijection, on peut conclure à l'existence et à l'unicité de x_n.

3. Justifier qu'on a $x_n \sim n\pi$.

   Par définition on a $\frac{-\pi}{2} + n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2} + n\pi$, c'est-à-dire, pour $n > 1$, $1 - \frac{1}{2n} \leqslant \frac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ c'est-à-dire $x_n \sim n\pi$.

4. Exprimer x_n en fonction de $\arctan(x_n)$ puis montrer qu'on a $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.

   Comme on a $\tan(x_n) = x_n$, il vient $\arctan(\tan(x_n)) = \arctan(x_n)$. Comme $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, on a $\arctan(\tan(x_n)) = x_n - n\pi$ et finalement $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$.

   Enfin, comme $x_n \sim n\pi$ on a en particulier $x_n \to +\infty$ et $\arctan(x_n) \to \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} + o(1)$ et donc $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$

5. Justifier qu'on a $\arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

   Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut utiliser le DA à trois termes de la fonction arctan en $+\infty$ établi précédemment.

   Il vient : $\arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$.

   De plus, comme $x_n \sim n\pi$ on a, par stabilité par produit et par quotient, $\frac{1}{x_n^3} \sim \frac{1}{n^3\pi^3}$.

   Enfin, par compatibilité des "petit-o" avec les équivalents, on a $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^3\pi^3}\right)$, puis, par absorption des constantes par les "petits-o", on conclut $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, d'où le résultat demandé.

6. En déduire un développement asymptotique à quatre termes de x_n.

   D'après ce qui précède on a : $x_n = n\pi + \arctan(x_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

   Remarquons maintenant qu'on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_n} &= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} && \text{d'après ce qui précède}\\
&= \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} && \text{en factorisant, et par absorption}\\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) && \text{par DA usuel}\\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) && \text{par opérations sur les "petits-o"}\\
&= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) && \text{par opérations sur les "petits-o"}
\end{aligned}$$

   De plus : $$\frac{1}{3x_n^3} \sim \frac{1}{3\pi^3 n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   Et finalement, on peut donc écrire, par opérations sur les "petits-o" :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3x_n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   ce qui constitue les développement asymptotique à quatre termes demandé.

   Remarque : en utilisant $\frac{1}{1+u_n} = 1 - u_n + u_n^2 + o(u_n^2)$ lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on pourrait même obtenir sans peine un DA à cinq termes de x_n !