Relations de comparaison.

Notations (rappels) :

1. « On a $P(n)$ APCR » signifie : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ P(n)$;
2. Pour a fini, « on a $P(x)$ au voisinage de a » signifie : $\exists \epsilon > 0,\ \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[,\ P(x)$;
3. Pour $a = +\infty$, « on a $P(x)$ au voisinage de a » signifie : $\exists A > 0,\ \forall x \in]A, +\infty[,\ P(x)$;
4. Pour $a = -\infty$, « on a $P(x)$ au voisinage de a » signifie : $\exists B < 0,\ \forall x \in]-\infty, B[,\ P(x)$.

I Domination

I.1 Définitions

Définition 1 : Domination pour les suites.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\left(\dfrac{|u_n|}{|v_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
2. Plus généralement, on dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on a $\exists K \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K|v_n|$ APCR.

Lorsque c'est le cas, on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Notation 1

1. On a vu qu'on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ pour « $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_n$ ».
2. On notera aussi $\mathcal{O}(v_n)$ l'ensemble de toutes les suites dominées par $(v_n)_n$.
3. On notera aussi $u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$ pour $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$.

Définition 2 : Domination pour les fonctions.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I.

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, on dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsque $\left(\dfrac{|f|}{|g|}\right)$ est majorée au voisinage de a.
2. En général, on dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsqu'on a $\exists K \geqslant 0,\ |f| \leqslant K|g|$ au voisinage de a.

Lorsque c'est le cas, on note $f = \mathcal{O}_a(g)$ $\Big($ou, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté sur a : $f = \mathcal{O}(g)\Big)$.

On peut également noter $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$. On reprend aussi les deux autres notations vues pour les suites.

I.2 Propriétés

Proposition 1 .

La relation de domination (« est dominé par ») est un préordre.

Théorème 1 : Propriétés algébriques de la domination.

La relation de domination

1. absorbe les constantes : si $\lambda \neq 0$ alors $\mathcal{O}_a(\lambda f) = \mathcal{O}_a(f)$;
2. est stable par somme au sens suivant : si $f = \mathcal{O}_a(u)$ et $g = \mathcal{O}_a(v)$ alors $f + g = \mathcal{O}_a(|u| + |v|)$;
3. est stable par produit : si $f = \mathcal{O}_a(u)$ et $g = \mathcal{O}_a(v)$ alors $fg = \mathcal{O}_a(uv)$.

Remarque 1

Le point 2. est surtout intéressant pour son cas particulier suivant : $\boxed{\text{si } f = \mathcal{O}_a(u) \text{ et } g = \mathcal{O}_a(u) \text{ alors } f + g = \mathcal{O}_a(u)}$.

Proposition 2 : Grands O de 0 et de 1.

1. $f = \mathcal{O}_a(1) \Leftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a
2. $f = \mathcal{O}_a(0) \Leftrightarrow f = x \mapsto 0$ au voisinage de a

Corollaire 1 : Zone rouge.

Si on est amené à écrire $u_n = \mathcal{O}(0)$ ou $f = \mathcal{O}(0)$, c'est très probablement qu'on a fait une erreur !

II Négligeabilité

II.1 Définitions

Définition 3 : Négligeabilité pour les suites.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on a $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
2. En général, on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\exists(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \begin{cases} u_n = \varepsilon_n v_n \text{ APCR} \\ \varepsilon_n \to 0. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note $u_n = o(v_n)$.

Notation 2

1. On a vu qu'on note $u_n = o(v_n)$ pour « $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ ».
2. On notera aussi $o(v_n)$ l'ensemble de toutes les suites dominées par $(v_n)_n$.
3. On notera aussi $u_n = v_n + o(w_n)$ pour $u_n - v_n = o(w_n)$.

Définition 4 : Négligeabilité pour les fonctions.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I.

1. Si $g \neq 0$ au voisinage de a, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'on a $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
2. En général, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varepsilon(x) \end{cases}$ telle que $\begin{cases} f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note $f = o_a(g)$ (ou, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté sur a : $f = o(g)$).

On peut également noter $f(x) = o_a(g(x))$. On reprend aussi les deux autres notations vues pour les suites.

II.2 Négligeabilités classiques

Proposition 3 .

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$.

1. $x^\alpha = o_{+x\to\infty}(x^\beta) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{id}^\alpha}{\mathrm{id}^\beta} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{id}^{\beta-\alpha}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \beta > \alpha$
2. $x^\alpha = o_0(x^\beta) \Leftrightarrow \mathrm{id}^{\alpha-\beta} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta$
3. $a^x = o_{+\infty}(b^x) \Leftrightarrow \frac{a^x}{b^x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow b > a$

Théorème 2 : Croissances comparées.

Pour $\alpha, \beta > 0$: 1. $x^\alpha = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right)$ 2. $\ln(x)^\alpha = o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$ 3. $\mathrm{e}^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ 4. $\ln(x)^\beta = o_{0^+}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 3 : Cas des suites.

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $q > 1$. On a : 1. $n^\alpha = o\left(q^n\right)$ 2. $\ln(n)^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ 3. $q^n = o\left(n!\right)$ 4. $n! = o\left(n^n\right)$

II.3 Propriétés

Proposition 4 .

La relation de négligeabilité (« est négligeable devant ») est transitive.

Théorème 4 : Propriétés algébriques de la négligeabilité.

La relation de négligeabilité

1. absorbe les constantes : si $\lambda \neq 0$ alors $o_a(\lambda f) = o_a(f)$;
2. est stable par somme :
   i/ si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(v)$ alors $f + g = o_a(|u| + |v|)$;
   ii/ si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(u)$ alors $f + g = o_a(u)$;
3. est stable par produit :
   i/ si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(v)$ alors $fg = o_a(uv)$;
   ii/ si $f = o_a(u)$ alors $fg = o_a(ug)$.

Proposition 5 : Petits o de 0 et de 1.

1. $f = o_a(1) \Leftrightarrow$ ....
2. $f = o_a(0) \Leftrightarrow$ ....

Corollaire 2 : Zone rouge.

Si on est amené à écrire $u_n = o(0)$ ou $f = o(0)$, c'est très probablement qu'on a fait une erreur !

III Équivalence

III.1 Définitions

Définition 5 : Équivalence pour les suites.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on a $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.
2. En général, on dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\exists(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\begin{cases} u_n = \gamma_n v_n \text{ APCR} \\ \gamma_n \to 1. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note $u_n \sim v_n$.

Définition 6 : Équivalence pour les fonctions.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I.

1. Si g NSP au voisinage de a, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'on a $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
2. En général, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'il existe ε : $\begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \gamma(x) \end{cases}$ telle que $\begin{cases} f(x) = \gamma(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \gamma(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note $f \sim_a g$ (ou $f \sim g$, ou $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$).

Remarque 2

L'intérêt de la relation d'équivalence est de calculer des équivalents simples pour simplifier l'étude en cours. Un équivalent qui se présente comme une somme n'est certainement pas un équivalent simple, donc est sans intérêt en tant qu'équivalent.

III.2 Équivalents classiques

Proposition 6 : Équivalent d'une fraction rationnelle en 0 et $\pm\infty$.

Soient $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_{n_0} x^{n_0}$ ($a_n, a_{n_0} \neq 0$) et $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_{m_0} x^{m_0}$ ($b_m, b_{m_0} \neq 0$) deux polynômes.

1. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim_{\pm\infty}$ .... ;
2. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim_0$ .... ;

Remarque 3

En particulier, pour un polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_{n_0} x^{n_0}$ ($a_n, a_{n_0} \neq 0$), on obtient :

Définition 7 : Série harmonique.

On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_n$ s'appelle la série harmonique.

Proposition 7 : Série harmonique.

On a $H_n \sim \ln(n)$.

Théorème 5 : Formule de Stirling.

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

III.3 Propriétés

Proposition 8 .

La relation d'équivalence (« est équivalente à ») est... une relation d'équivalence. Eh oui.

Théorème 6 .

Deux fonction équivalentes ont, sous réserve d'existence, même limite et même signe au voisinage de a.

Théorème 7 : Propriétés algébriques de l'équivalence.

La relation d'équivalence

1. est stable par produit : si $f \sim u$ et $g \sim v$ alors $fg \sim uv$;
2. est stable par quotient : si $f \sim u$, $g \sim v$ et v ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{u}{v}$;
3. est stable par puissance <u>constante</u> : si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$.

Proposition 9 : Équivalents constants.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \sim_a \ell \Leftrightarrow$ ....
2. $f \sim_a 0 \Leftrightarrow$ ....

Corollaire 3 : Zone rouge.

Si on est amené à écrire $u_n \sim 0$ ou $f \sim 0$, <u>c'est très probablement qu'on a fait une erreur</u> !

III.4 Lien avec la négligeabilité.

Théorème 8 : lien avec la négligeabilité.

$$\begin{aligned} f \sim_a g \quad &\Leftrightarrow \quad f = g + o_a(g) \\ &\Leftrightarrow \quad f = g + o_a(f) \end{aligned}$$

Corollaire 4 .

Tout DL est équivalent à son premier terme non nul s'il en existe un.
Autrement dit si a_{n_0} est le premier a_i non nul dans l'expression précédente, alors $f(x) \sim_0 a_{n_0} x^{n_0}$.

IV Développements asymptotiques

Définition 8 : Développement asymptotique.

On notera DA pour « développement asymptotique ».

1. On appelle DA à un terme de f en a une expression de la forme $f = g + o_a(g)$ où g est un équivalent **simple**[a] de f.
2. On appelle DA à deux termes de f en a une expression de la forme $f = g + h + o_a(h)$ où :
$$\begin{cases} g \text{ est un équivalent \textbf{simple} de } f \text{ ;} \\ h \text{ est un équivalent \textbf{simple} de } f - g. \end{cases}$$
3. On appelle DA à trois termes de f en a une expression de la forme $f = g + h + u + o_a(u)$ où :
$$\begin{cases} g \text{ est un équivalent \textbf{simple} de } f \text{ ;} \\ h \text{ est un équivalent \textbf{simple} de } f - g \text{ ;} \\ u \text{ est un équivalent \textbf{simple} de } f - g - h. \end{cases}$$

Et cætera.

a. Vu le lien équivalence/négligeabilité, c'est nécessairement un équivalent de f.