Probabilités

Modélisation – Dénombrements déguisés – Python

Exercice 1.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 3$. On tire successivement $n-1$ boules sans remise[1].

1. Proposer une modélisation par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
2. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré les boules 1, 2 et 3 ?
3. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré les boules 1, 2 et 3 dans cet ordre ?
4. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré les boules 1, 2 et 3 dans cet ordre et à la suite ?
5. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré les boules 1, 2 et 3 à la suite mais pas forcément dans cet ordre ?
6. Vérifier tous ces résultats en simulant cette expérience aléatoire avec Python et en la réalisant plein de fois.

Exercice 2. *{Couleurs}={Coeur, Carreau, Pique, Trèfle}*

1. Déterminer la probabilité (s'aider d'une calculatrice) qu'une main de 5 cartes parmi 52 cartes soit :
   (a) Une quinte floche (cinq cartes de même couleur dont les valeurs se suivent).
   (b) Un carré (quatre cartes de même valeur et une cinquième).
   (c) Un full (deux cartes de même valeur et trois cartes de même valeur).
   (d) Une couleur (cinq cartes de même couleur) qui ne soit pas une quinte floche.
   (e) Une suite (cinq cartes dont les valeurs se suivent) qui ne soit pas une quinte floche.
   (f) Un brelan (trois cartes de même valeur et deux autres de valeurs différentes).
   (g) Deux paires (deux cartes d'une même valeur, deux autres cartes d'une autre même valeur et une dernière cartes d'une valeur encore différente).
   (h) Une paire (deux cartes d'une même valeur et trois autres cartes de valeurs toutes différentes).
   (i) Rien (aucune des mains précédentes).
2. En déduire que les règles du poker sont pertinentes.
3. Vérifier tous ces résultats en simulant avec Python l'expérience aléatoire correspondant au tirage d'une main de cinq cartes et en réalisane tun grand nombre de fois cet expérience.

Probabilités composées

Exercice 3. *Paradoxe des anniversaires. Utiliser une calculatrice.*
On considère n personnes dont aucune n'est née un 29 février.

1. Quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire ?
2. A partir de combien de personnes peut-on dire que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire est égale à 1 ?
3. A partir de combien de personnes peut-on dire que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$?
4. A partir de combien de personnes peut-on dire que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire est strictement supérieure à 99% ?

Indications : Passer par les événements contraires. Appliquer la formule des probas composées. Utiliser une calculatrice.

1. Dans ce type d'énoncé, il faut comprendre que chaque tirage se fait avec équiprobabilité, faute d'avoir plus d'information.

Exercice 4. *Monty Hall*
Dans un jeu télévisé, un candidat doit ouvrir une porte parmi trois : il gagnera ce qui se cache de l'autre côté. Derrière l'une de ses portes, une magnifique voiture. Derrière les deux autres, rien. Le candidat choisit une porte et le présentateur malicieux ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle il sait qu'il n'y a rien. Il demande alors au candidat si celui-ci désire changer son choix.

1. Écrire un programme PYTHON permettant de modéliser cette expérience aléatoire.
   Attention : modélisez cette expérience aléatoire précisément, pas une autre : *le présentateur ouvre une porte derrière laquelle il sait qu'il n'y a rien.*
2. Le candidat augmentera-t-il sa probabilité de gain en changeant son choix ?

Probabilités totales

Exercice 5.
On considère une cellule qui peut se diviser en 2 (par mitose) avec probabilité p, ou mourir avec probabilite $1-p$ ($p \in]0,1[$). On veut calculer la probabilité que sa lignée soit éteinte a la n-ième génération. On note cette probabilité u_n.

On admet qu'on peut modéliser ceci par un espace probabilisé [2].

1. Modéliser la colonie de cellules avec Python pour confirmer ou infirmer les résultats à venir.
2. Que vaut u_0 ?
3. Donner une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_n$.
4. Déterminer la monotonie puis la limite de u_n.

Indication : Appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A, {}^cA)$, où A est l'événement «la cellule originelle meurt ».

Exercice 6.
On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, d'une réserve inépuisable de boules noires, et d'une pièce de monnaie equilibree.
On considère l'expérience E suivante : on effectue des lancers successifs et independants de la pièce et :

- si on obtient « pile » alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ;
- si on obtient « face » alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas modéliser l'expérience E en restant dans le cadre du programme de MPSI.
2. On considère l'expérience E_N obtenue en modifiant E de la façon suivante : si les N premiers lancés donnent « face », on fait comme si le N^e lancé avait donné « pile ». Proposer un espace probabilisé MPSI-compatible pour modéliser E_N.
3. On réalise E_N. Soit $n \leqslant N$. Quelle est la probabilité p_n que l'on obtienne une boule blanche en ayant lancé au plus n fois la pièce ? Vérifier que p_n ne dépend que de n et pas de N : comment interpéter ce résultat ?
4. Interpréter $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ puis calculer cette limite.

Exercice 7.
Un joueur joue a un jeu d'argent contre le casino. Initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N-a \geqslant a$ (la fortune totale joueur+casino est N). Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.
A chaque répetition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 avec probabilité p ou perd 1 avec probabilité $q = 1-p$.

On note x_n la fortune du joueur a l'issue du ne jeu, de sorte qu'on a : $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec probabilité } q \end{cases} \end{cases}$.

Le jeu s'arrête des que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).
On admet qu'on peut modéliser ceci par un espace probabilisé [2] .

2. Voir dans l'exercice **??** une technique permettant de le rendre MPSI-compatible

On note u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a.
On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.

1. Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leqslant a \leqslant N-1$, on a : $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.
2. Montrer qu'on a, pour tout $a \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $u_a = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$.
3. Déterminer la limite de u_a pour $N \to +\infty$ (a étant fixé). Interprétation ?

Bayes

Exercice 8. *Pile ou face*

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. On note p la probabilité pour qu'il soit un tricheur (les tricheurs gagnent toujours à ce jeu, les autres joueurs une fois sur deux). On note $x \in [0, 1]$ la proportion de tricheurs dans la population.

Que doit valoir x pour qu'on ait $p \geqslant \frac{1}{2}$?

Exercice 9.

On considère 3 urnes : U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges ; U_2 contient une boule noire et 4 boules rouges ; U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les met dans U_3. On tire une boule dans U_3, elle est noire. Sachant cela, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 ait été rouge ?

Indication : utiliser la grosse formule de Bayes avec un sce formé de 4 *événements.*