1

2

3

4

5

6

7

8

On nous demande la probabilité p que le joueur soit un tricheur sachant qu'il a gagné.

x est la proportion de tricheur

Notons $\begin{cases} T & = \text{“Le joueur est un tricheur”} \\ {}^cT & = \text{“Le joueur n'est pas un tricheur”} \\ G & = \text{“Le joueur a gagné”} \\ T & = \text{“Le joueur a perdu”} \end{cases}$

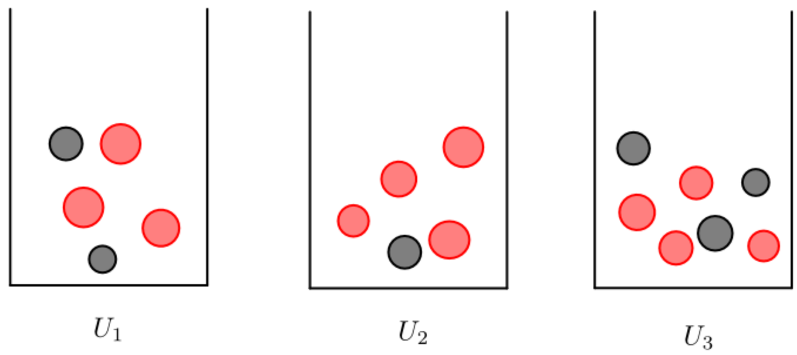
On a $\begin{cases} P(T) & = x \\ P(G|T) & = 1 \\ P(G|{}^cT) & = \frac{1}{2} \end{cases}$

On cherche $P(T|G)$ D'après Bayes comme $\begin{cases} P(G) & \neq 0 \\ P(P) & \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} P(T|G) &= \frac{xP(G|T)}{P(G)} \\ &= \frac{x}{P(G)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T)P(G|T) + P({}^cT)P(G|{}^cT) && \text{d'après la FPT} \\ &= x + (1-x)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = P(T|G) = \frac{2x}{x+1} \geq \frac{1}{2} &\iff 4x \geq x + 1 \\ &\iff 3x - 1 \geq 0 \\ &\iff x \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$



9

$$\text{Soit} \begin{cases} R_1 & := \text{“La boule tirée de } U_1 \text{ est rouge”} \\ N_1 & := {}^cR_1 \\ R_2 & := \text{“La boule tirée de } U_2 \text{ est rouge”} \\ N_2 & := {}^cR_2 \\ R_3 & := \text{“La boule tirée de } U_3 \text{ est rouge”} \\ N_3 & := {}^cR_3 \end{cases}$$

On cherche $P(R_1|N_3)$

On considère le sce suivant:

$$(R_1 \cap R_2, R_1 \cap N_2, N_1 \cap R_2, N_1 \cap N_2)$$

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1)P(R_2) = \frac{12}{25} \neq 0 \\ P(R_1 \cap N_2) &= P(R_1)P(N_2) = \frac{3}{25} \neq 0 \\ P(N_1 \cap R_2) &= P(N_1)P(R_2) = \frac{8}{25} \neq 0 \\ P(N_1 \cap N_2) &= P(N_1)P(N_2) = \frac{2}{25} \neq 0 \end{aligned}$$

D'après Bayes:

$$P(R_1|N_3) = \frac{P(R_1)P(N_3|R_1)}{P(N_3)}$$

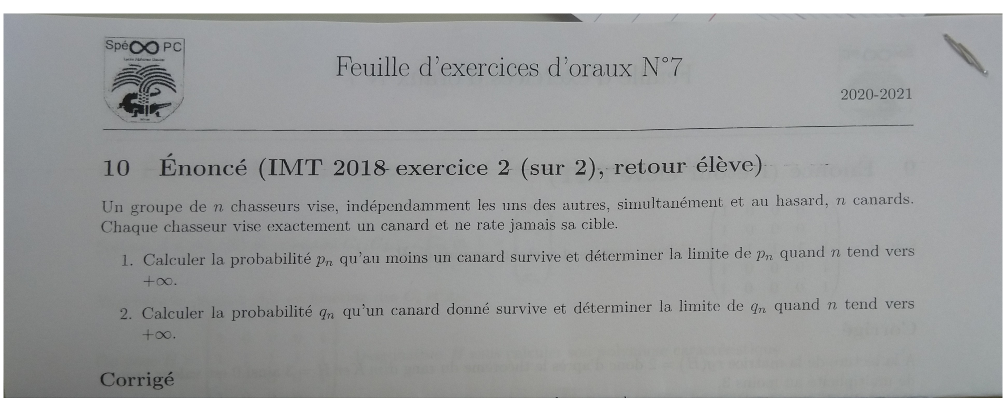
et

$$
\begin{aligned}
P(N_3) &= \frac{12}{25}P(N_3|R_1\cap R_2) + \frac{3}{25}P(N_3|R_1\cap N_2) + \frac{8}{25}P(N_3|N_1\cap R_2) + \frac{2}{25}P(N_3|N_1\cap N_2) \\
&= \frac{12}{25}\frac{3}{9} + \frac{3}{25}\frac{4}{9} + \frac{8}{25}\frac{4}{9} + \frac{2}{25}\frac{5}{9} \\
&= \frac{36+12+32+10}{9\cdot 25} \\
&= \frac{90}{9\cdot 25} = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(N_3|R_1) &= P(R_2|R_1)P(N_3|R_1|R_2) + P(N_2|R_1)P(N_3|N_2|R_1) \\
&= P(R_2|R_1)P(N_3|R_1\cap R_2) + P(N_2|R_1)P(N_3|N_2\cap R_1) \\
&= P(R_2)P(N_3|R_1\cap R_2) + P(N_2)P(N_3|N_2\cap R_1) \qquad \text{par indépendance de } R_2, R_1, N_2 \\
&= \frac{4}{5}\frac{3}{9} + \frac{1}{5}\frac{4}{9} \\
&= \frac{16}{5\cdot 9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(R_1|N_3) &= \frac{\frac{3}{5}\frac{16}{5\cdot 9}}{\frac{2}{5}} \\
&= \frac{24}{5\cdot 9} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

10 Bonus



Feuille d'exercices d'oraux N°7

2020-2021

10 Énoncé (IMT 2018 exercice 2 (sur 2), retour élève)

Un groupe de n chasseurs vise, indépendamment les uns des autres, simultanément et au hasard, n canards. Chaque chasseur vise exactement un canard et ne rate jamais sa cible.

1. Calculer la probabilité p_n qu'au moins un canard survive et déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Calculer la probabilité q_n qu'un canard donné survive et déterminer la limite de q_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé

10.1

Passons par l'évènement contraire

Soit $H =$ "Aucun canard ne survit"

Notons $f : i \mapsto$ numéro du canard choisi par le chasseur i

On a f bijective

$$P(A) = \frac{n!}{n^n}$$

On a $p_n = 1 - \frac{n!}{n^n}$
On a $p_n \to 1$ par croissance comparée et PAL

10.2

Fixons $k \in [\![1, n]\!]$
On cherche la probabilité que le canard k (et pas un autre) survive.
Notons $C_j =$ "Le chasseur j ne tire pas sur le canard k" pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} C_i\right) &= \prod_{1 \leq i \leq n} P(C_i) && \text{par indépendance} \\
&= \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \\
&= (1 - \frac{1}{n})^n \\
&\to \frac{1}{l}
\end{aligned}$$