Probabilités

Les trois théorèmes importants de ce chapitre sont :

- la formule des probabilités composées ;
- la formule des probabilités totales ;
- la formule de Bayes.

I Expériences aléatoires

I.1 Définition

Définition (informelle) 1 : Expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'ensemble des issues possibles est connue mais dont l'issue n'est pas connue avant de réaliser l'expérience.

I.2 L'expérience aléatoire « `Choisir(MPSI)` »

I.3 Modélisation

Remarque 1

Cette année, on considèrera uniquement le cas où Ω est fini. C'est très restrictif mais philosophiquement plus honnête.

II Espaces probabilisés finis

II.1 Espaces probabilisables finis

Définition 2 .

On appelle espace probabilisable fini un couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble fini.

Remarque 2

Comme annoncé dans la remarque 1, on se limite donc au cas fini. C'est très embêtant car on s'interdit des expériences aléatoires très simples[1] dont on a envie de parler, comme par exemple :

- lancer un dé jusqu'à obtenir 6 ;
- choisir un réel uniformément au hasard entre 0 et 1 ;
- ...

On verra quand même en TD une astuce permettant d'intégrer malgré tout les expériences du type « lancer un dé jusqu'à obtenir 6 » au programme de MPSI.[2].

Définition 3 .

On appelle « système complet d'événements » (en abrégé sce) une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ telle que

$$\begin{cases} \forall i \neq j,\ A_i \text{ et } A_j \text{ sont incompatibles ;} \\ \text{et } A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \ ; \end{cases}$$

autrement dit telle que $A_1 \amalg A_2 \amalg \cdots \amalg A_n = \Omega$.

1. Mais non accessibles à l'être humain.
2. C'est comme d'habitude, on prend un gros marteau et on tape fort.

II.2 Probabilité

Définition 4 .

Soit Ω un ensemble fini. On appelle probabilité sur Ω une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$;
2. pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles, $P(A \amalg B) = P(A) + P(B)$.

Remarque 3

Lorsqu'on modélise une expérience aléatoire, on ne la modélise pas seulement par Ω, mais par l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$.

Théorème 1 : théorème de caractérisation.

Soit Ω un ensemble fini.

1. Si $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est une probabilité alors $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.
2. Réciproquement, si $p : \Omega \to [0,1]$ vérifie $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ alors l'application naturellement induite $P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega) \end{array} \right.$ est bien définie et c'est une probabilité.

II.3 Propriétés immédiates

Proposition 1 .

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé. On a :

0. $P(\emptyset) = 0$;
1. pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P({}^cA) = 1 - P(A)$;
2. P est croissante pour l'inclusion ;
3. pour tous $A,\ B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

III Indépendance

Définition 5 .

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé.
Deux événements A et B sont dit <u>indépendants</u> lorsqu'on a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque 4

Considérons l'expérience aléatoire « on lance un dé vert et un dé bleu ».
Faute d'information supplémentaire, on la modélise par $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ où $\begin{cases} \Omega & = [\![1,6]\!]^2 \\ P & = P_U \end{cases}$ Montrer que cette modélisation implique que les deux lancés sont indépendants (commencer par donner un sens à cette phrase).
On note "couleur $\to i$" := "le dé couleur donne i"
Soient $\begin{cases} V_i : & = \text{"le dé vert donne } i\text{"} \\ B_j : & = \text{"le dé bleu donne } j\text{"} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
P(V_i) &= P(\{i\} \times \{1, \ldots, 6\}) \\
&= \frac{|\{i\} \times \{1, \ldots, 6\}|}{|\Omega|} \\
&= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\
P(B_j) &= P(\{j\} \times \{1, \ldots, 6\}) \\
&= \frac{|\{j\} \times \{1, \ldots, 6\}|}{|\Omega|} \\
&= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\
P(V_i \cap B_j) &= P(\{i, j\}) \\
&= \frac{1}{36} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
&= P(V_i)P(B_j)
\end{aligned}$$

III.1 Indépendance mutuelle

Définition 6 .

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements.
On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants lorsqu'on a :
$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \forall i_1 < i_2 < \cdots < i_k \in \{1, \ldots, n\},\ P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

Remarque 5

1. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors
   - ils sont indépendants 2 à 2 (*i. e.* $\forall i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$) ;
   - et ils sont indépendants n à n (*i. e.* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times \cdots \times P(A_n)$).
2. L'indépendance 2 à 2 n'implique pas l'indépendance mutuelle.
3. L'indépendance n à n n'implique pas l'indépendance mutuelle.

IV Probabilités conditionnelles

IV.1 Définition

Définition 7 .

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé, A un événement et B un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité de A sachant B et on note $P_B(A)$ ou $P(A \,|\, B)$ le quotient $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Théorème 2 .

Soit B un événement de probabilité non nulle.
L'application $P_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0, 1] \\ A & \mapsto & P_B(A) \end{array} \right.$ est une probabilité.

Remarque 6

Si A et B sont deux événement de probabilités non nulles alors :

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$;
2. $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$.

IV.2 Formule des probabilités composées

Théorème 3 : Formule des probabilités composées.

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

1. $\forall k \leqslant n-1,\ P(A_1 \cap \dots \cap A_k) \neq 0$;
2. $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

IV.3 Formule des probabilités totales

Théorème 4 : Formule des probabilités totales.

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de probabiltés non nulles et B un événement. On a : $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$.

Remarque 7

La formule reste vraie si certains A_i sont de probabilité nulle avec la convention $0 \cdot P(B|A) = 0$

IV.4 Formule de Bayes

Théorème 5 : Petite formule de Bayes.

Soient A et B deux événements de probabiltés non nulles. On a : $P_B(A) = \dfrac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$.

Théorème 6 : Grosse formule de Bayes.

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de probabiltés non nulles et B un événement de probabilité non nulle. On a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P_B(A_k) = \dfrac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}$.