4/2

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un sce de probas $\neq 0$ et B un évènement.

Alors $$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k)$$

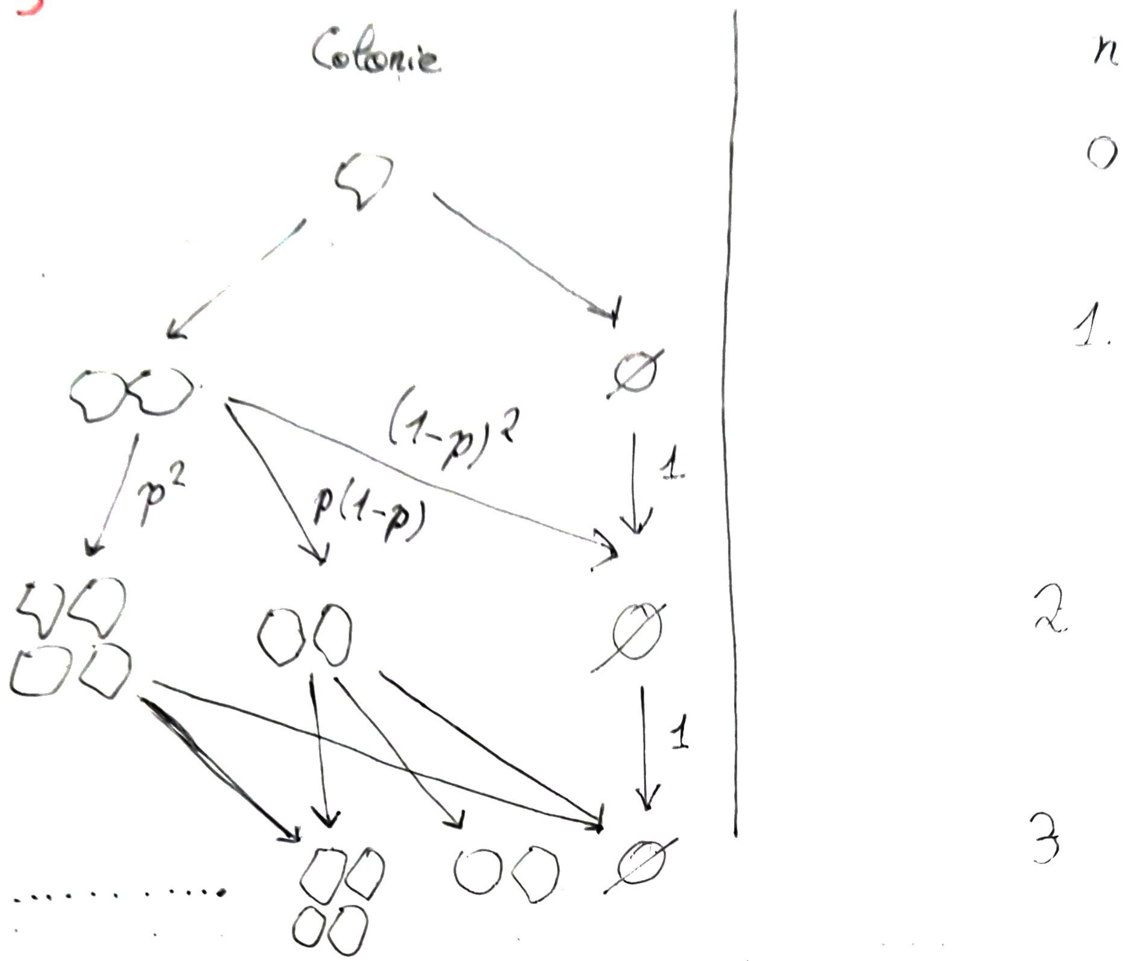
$$\begin{cases} GC = \text{“On gagne en changeant son choix”} \\ {}^cGC = \text{“On perd ——————”} \end{cases}$$

On cherche $P(GC)$

Notons $$\begin{cases} A = \text{“On a choisi la bonne porte”} \\ {}^cA = \text{“ ———— une mauvaise porte”} \end{cases}$$

On a $$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{3} \neq 0 \\ P({}^cA) = \frac{2}{3} \neq 0 \end{cases}$$

FpT : $$\begin{aligned} P(GC) &= P(A)P(GC|A) + P({}^cA)P(GC|{}^cA) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times 1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



$u_n = P(E_n)$ où E_n = "la génération est éteinte à la n-ième gen".

<u>Conjecture</u>

p	$\lim u_n$
$1/2$	≈ 1
$1/4$	1
$1/3$	1
$.45$	1
$2/3$	$\frac{1}{2}$
$3/4$	$\frac{1}{3}$

$$
\begin{array}{c|l}
9/10 & \frac{1}{9} \\
8/9 & 1/8 \\
r & \begin{cases} \frac{1}{p} - 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{array}
$$

$\boxed{5/2}$

$$
\begin{aligned}
u_0 &= P(E_0) \\
&= P(\text{“La colonie est éteinte à la gén. 0”}) \\
&= P(\emptyset) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{5/3}$ Soit $n \geq 1$

$u_n = P(E_n) = \, ?$

Θ = “La cellule originelle”

${}^c\Theta$ = “La cellule se dédouble”

$$
\begin{cases} P(\Theta) = 1 - p & \neq 0 \\ P({}^c\Theta) = p & \neq 0 \end{cases}
$$

FPT $\quad P(E_n) = P(A)P(E_n | A) + P({}^cA)P(E_n | {}^cA)$

$P(E_n | A) = 1$

$P(E_n \mid {}^cA) = P($"Les descendances des deux cellules filles de la cellule originelle s'éteignent en $n-1$"$)$

$$= \underbrace{P(E_{n-1})}_{\text{la lignée de la première fille s'éteint}} \times \underbrace{P(E_{n-1})}_{\text{la lignée de la deuxième fille s'éteint}}$$

indépendance du comportement des filles (pauvre Darwin)

D'où $\quad u_n = \underbrace{1-p} + p\, u_{n-1}^2$

FPT $\quad P(E_n) = P(A)\, \underbrace{P(E_n \mid A)} + P({}^cA)\, P(E_n \mid {}^cA)$

où $\quad 1-p+p\,\mathrm{id}^2 \in \mathcal{C}([0,1],[0,1])$

([0,1] est fermé et [0,1] = [0,1])

Si u converge alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est un point fixe

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. ℓ pt fixe $\Leftrightarrow f(\ell)=\ell \Leftrightarrow 1-p+p\ell^2=\ell$

$\Leftrightarrow p\ell^2-\ell+(1-p)=0$

$$\Delta = 1 - 4p(1-p)$$
$$= 4p^2 - 4p + 1$$
$$= (2p-1)^2$$

$$\ell_{1,2} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p} \rightarrow \begin{cases} \ell_1 = 1 \\ \ell_2 = \frac{1}{p} - 1 \end{cases}$$

$(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ donc elle est bornée

$$u_{n+1} - u_n = p u_n^2 - u_n + (1-p)$$

qui est du signe de p. (ie > 0)

à l'extérieur des racines

$$0 = u_0 \leq \ell_{1,2}$$

ie $\quad f(u_0) \leq f(\ell_{1,2})$

$\vdots$ $n+1$ fois

ie $\quad u_n \leq \ell_{1,2}$

On trouve la même chose