Ordre supérieur

Images directe et réciproque

Exercice 1. *Comparaisons.*

Dans cet exercice, on se donne deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On note $f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'application "image directe par f" et $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ l'application "image réciproque par f".

On se donne de plus $U, V \subset A$ et $P, Q \subset B$.

1. Comparer $f^{\to}(f^{\leftarrow}(P))$ et P.
2. Comparer $f^{\leftarrow}(f^{\to}(U))$ et U.
3. Comparer $f^{\leftarrow}(P \cup Q)$ et $f^{\leftarrow}(P) \cup f^{\leftarrow}(Q)$.
4. Comparer $f^{\leftarrow}(P \cap Q)$ et $f^{\leftarrow}(P) \cap f^{\leftarrow}(Q)$.
5. Comparer $f^{\to}(U \cup V)$ et $f^{\to}(U) \cup f^{\to}(V)$.
6. Comparer $f^{\to}(U \cap V)$ et $f^{\to}(U) \cap f^{\to}(V)$.

Exercice 2.

Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$.

1. Montrer que $f : A \to B$ est injective si et seulement si $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\to}\big({}^cX\big) \subset {}^cf^{\to}(X)$.
2. Montrer que $f : A \to B$ est surjective si et seulement si $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\to}\big({}^cX\big) \supset {}^cf^{\to}(X)$.
3. CNS de bijectivité ?

Fonctions caractéristiques

Exercice 3.

Soit E un ensemble et $A, B \subset E$.

1. En utilisant une expression de $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ vue en cours, déduire une démonstration simple de l'associativité de la différence symétrique.
2. Montrer qu'on a $\mathcal{P}(B)^A \simeq \{0,1\}^{A\times B}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$.

On veut calculer $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|$, on conseille de regarder ce qui se passe pour $n = 1$ et $n = 2$ avant de se lancer.

1. Rappeler la valeur, pour toute partie X de E, de $\sum_{x\in E} \mathbb{1}_X(x)$.
2. Justifier que, pour tout $x \in E$, on a $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathbb{1}_X(x) = 2^{n-1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|$.

Exercice 5. Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$.

On veut calculer $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y|$, on conseille de regarder ce qui se passe pour $n = 1$ et $n = 2$ avant de se lancer.

1. Pour $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, rappeler la valeur de $\mathbb{1}_{X\cap Y}(x)$.
2. En reprenant l'idée de l'exercice précédent, déduire la valeur de $\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y|$.

Ordre supérieur

Exercice 1. *Comparaisons.*

Dans cet exercice, on se donne deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On note $f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'application "image directe par f" et $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ l'application "image réciproque par f".

On se donne de plus $U, V \subset A$ et $P, Q \subset B$.

1. Comparer $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(P))$ et P.
2. Comparer $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(U))$ et U.
3. Comparer $f^{\leftarrow}(P \cup Q)$ et $f^{\leftarrow}(P) \cup f^{\leftarrow}(Q)$.
4. Comparer $f^{\leftarrow}(P \cap Q)$ et $f^{\leftarrow}(P) \cap f^{\leftarrow}(Q)$.
5. Comparer $f^{\rightarrow}(U \cup V)$ et $f^{\rightarrow}(U) \cup f^{\rightarrow}(V)$.
6. Comparer $f^{\rightarrow}(U \cap V)$ et $f^{\rightarrow}(U) \cap f^{\rightarrow}(V)$.

1. On a $f\big(f^{-1}(P)\big) \subset P$.
   — Soit $y \in f\big(f^{-1}(P)\big)$. Par définition il existe $x \in f^{-1}(P)$ tel que $f(x) = y$. Par définition de $f^{-1}(P)$, on a alors $f(x) \in P$, c'est-à-dire $y \in P$. D'où l'inclusion.
   — L'autre inclusion n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $A \neq \emptyset$, $|B| \geqslant 2$, $f = x \mapsto b$ (où b est un élément fixé de B) et $P = B$.
   On a alors $f\big(f^{-1}(P)\big) = f(A) = \{b\}$ qui est strictement inclus dans B.
2. On a $U \subset f^{-1}\big(f(U)\big)$.
   — Soit $x \in U$. Par définition on a $f(x) \in f(U)$ et donc, par définition, $x \in f^{-1}\big(f(U)\big)$. D'où l'inclusion.
   — L'autre inclusion n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $|A| \geqslant 2$, $B \neq \emptyset$, $f = x \mapsto b$ (où b est un élément fixé de B) et $U = \{a\}$ (où a est un élément fixé de A). On a alors $f^{-1}\big(f(U)\big) = f^{-1}\big(\{b\}\big) = A$ qui contient strictement $\{a\}$.
3. On a $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$.
   — Soit $x \in f^{-1}(P \cup Q)$. Par définition, on a $f(x) \in P \cup Q$, il y a donc deux cas possibles : $f(x) \in P$ ou $f(x) \in Q$. Si $f(x) \in P$ alors $x \in f^{-1}(P)$ par définition, et donc $x \in f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$. Si $f(x) \in Q$ alors $x \in f^{-1}(Q)$ par définition, et donc $x \in f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$. Dans tous les cas on a $x \in f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$. D'où l'inclusion directe.
   — Soit $x \in f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$, il y a donc deux cas possibles : $x \in f^{-1}(P)$ ou $x \in f^{-1}(Q)$. Dans le premier cas on a $f(x) \in P$, donc $f(x) \in P \cup Q$. Dans le second cas on a $f(x) \in Q$, donc $f(x) \in P \cup Q$. Dans tous les cas on a $f(x) \in P \cup Q$, donc $x \in f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$ par définition. D'où l'inclusion réciproque.
4. On a $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.
   — Soit $x \in f^{-1}(P \cap Q)$. Par définition, on a $f(x) \in P \cap Q$, c'est-à-dire $f(x) \in P$ et $f(x) \in Q$. Comme $f(x) \in P$ on a $x \in f^{-1}(P)$ par définition. Comme $f(x) \in Q$ on a $x \in f^{-1}(Q)$ par définition. Finalement on a $x \in f^{-1}(P)$ et $x \in f^{-1}(Q)$, et donc $x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$. D'où l'inclusion directe.
   — Soit $x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$, on a donc $x \in f^{-1}(P)$ et $x \in f^{-1}(Q)$. Comme on a $x \in f^{-1}(P)$, on a $f(x) \in P$. Comme on a $x \in f^{-1}(Q)$, on a $f(x) \in Q$. Finalement on a $f(x) \in P$ et $f(x) \in Q$, et donc $f(x) \in P \cap Q$. D'où l'inclusion réciproque.
5. On a $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$.
   — Soit $y \in f(U \cup V)$. Par définition, il existe $x \in U \cup V$ tel que $y = f(x)$. On a deux cas possibles : soit $x \in U$, et donc $f(x) \in f(U) \subset f(U) \cup f(V)$; soit $x \in V$, et donc $f(x) \in f(V) \subset f(U) \cup f(V)$. Dans tous les cas on a $y = f(x) \in f(U) \cup f(V)$. D'où l'inclusion directe.
   — Soit $y \in f(U) \cup f(V)$. On a deux cas possibles : soit $y \in U$, et donc il existe $x \in U \subset U \cup V$ tel que $y = f(x)$; soit $y \in V$, et donc il existe $x \in V \subset U \cup V$ tel que $y = f(x)$. Dans tous les cas il existe $x \in U \cup V$ tel que $y = f(x)$, et donc $y \in f(U \cup V)$. D'où l'inclusion réciproque.
6. On a $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$.
   — Soit $y \in f(U \cap V)$. Par définition il existe $x \in U \cap V$ tel que $f(x) = y$.
   En particulier, on a $x \in U$, donc $f(x) \in f(U)$. De même on a $x \in V$, donc $f(x) \in f(V)$. On a donc $y = f(x) \in f(U) \cap f(V)$. D'où l'inclusion.
   — L'autre inclusion n'est pas toujours vraie.
   Contre-exemple : $A = B = \{1, 2\}$, $f = x \mapsto 1$, $U = \{1\}$ et $V = \{2\}$. On a alors $f(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(U) \cap f(V) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$. Ce contre-exemple se généralise à $|A| \geqslant 2$ et $B \neq \emptyset$, en prenant f de la forme $x \mapsto b$, et U et V non vides et tels que $U \coprod V = A$.

$\boxed{2/3}$ voir sur le forum

$\boxed{2/1}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective

Soit $X \in \mathcal{P}(A)$. Montrons $f^{\rightarrow}\,{}^{c}X \subset {}^{c}f^{\rightarrow}X$

Soit $b \in f^{\rightarrow}\,{}^{c}X$ i.e. il existe $b \in {}^{c}X$ tel que $b = f(a)$.

Montrons $b \in {}^{c}f^{\rightarrow}X$ ie $b \notin f^{\rightarrow}X$ par l'absurde.

Supposons $b \in f^{\rightarrow}X$

Par définition il existe $x \in X$ tel que $b = f(x)$

donc par injectivité $b = f(a) = f(x) \Rightarrow a = x$

Or $a \in {}^{c}X$ et $x \in X$ imp

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall X \in \mathcal{P}(A)\ f^{\rightarrow}\,{}^{c}X = {}^{c}f^{\rightarrow}X$.

Et montrons f injective par l'absurde.

Soient $a_1, a_2 \in A$ tq $f(a_1) = f(a_2)$

Supposons $a_1 \neq a_2$ i.e. $a_1 \in {}^{c}\{a_2\}$

par définition $f(a_1) \in f^{\rightarrow}({}^{c}\{a_2\}) \subset {}^{c}f^{\rightarrow}\{a_2\}$ par hypothèse

donc $f(a_1) \in {}^{c}f^{\rightarrow}\{a_2\}$

ie $f(a_1) \notin f^{\rightarrow}\{a_2\} = \{f(a_2)\}$

donc $f(a_1) \neq f(a_2)$ imp

$\boxed{2/2}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $f : A \to B$ surjective.

Soient $X \in \mathcal{P}(A)$ et $b \in B$.

Supposons $b \in {}^{c}f^{\to}X$

ie $b \in {}^{c}\{f(x), x \in X\}$

ie $b \notin \{f(x), x \in X\}$

ie $\forall x \in X,\ b \neq f(x)$.

Montrons $b \in \{f(y), y \in {}^{c}X\}$

ie $b \in \{f(y), y \notin X\}$

Par surjectivité de f, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$

Or $b \in {}^{c}\{f(x), x \in X\}$ donc $a \notin X$ ie. $a \in {}^{c}X$.

d'où $b \in f^{\to}({}^{c}X)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ {}^{c}f^{\to}X \subset f^{\to}({}^{c}X)$

En particulier pour $X = \emptyset$, on a

$${}^{c}f^{\to}\emptyset \subset f^{\to}A$$

ie ${}^{c}\emptyset \subset f^{\to}A$

ie $B \subset f^{\to}A$

ie $f^{\to}A = B$

ie f surjective.

Exercices: Ordre supérieur

Ewen Le Bihan

2020-01-20

Abstract

Sujet disponible à `http://mpsi.daudet.free.fr/maths/exercices/td/TD16_ordre_superieur.pdf`

2-3

Avec un excès de zèle monstrueux, j'adore ça.

Notons respectivement $(\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow)$, $(\twoheadrightarrow)$ et $(\rightarrowtail)$ les FEF[1] des bijections, surjections et injections.

Montrons que $f \in (\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow)(A, B) \iff \forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\rightarrow}(\,^{c}X) = \,^{c}f^{\rightarrow}(X)$ par équivalences successives.

$$
\begin{aligned}
f \in (\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow)(A,B) &\iff f \in (\rightarrowtail)(A,B) \cap (\twoheadrightarrow)(A,B) && \text{Par définition de } (\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow) \\
&\iff f \in (\rightarrowtail)(A,B) \land f \in (\twoheadrightarrow)(A,B) && \text{Par définition de } \cap \\
&\iff (\forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\rightarrow}(\,^{c}X) \supset \,^{c}f^{\rightarrow}(X)) \\
&\land (\forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\rightarrow}(\,^{c}X) \subset \,^{c}f^{\rightarrow}(X)) && \text{Par caractérisation avec l'ordre supérieur de } (\rightarrowtail) \text{ et } (\twoheadrightarrow) \\
&\iff \forall X \in \mathcal{P}(A),\ \begin{cases} f^{\rightarrow}(\,^{c}X) & \supset \,^{c}f^{\rightarrow}(X) \\ f^{\rightarrow}(\,^{c}X) & \subset \,^{c}f^{\rightarrow}(X) \end{cases} && \text{Par associativité de } \land \\
&\iff \forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\rightarrow}(\,^{c}X) = \,^{c}f^{\rightarrow}(X) && \text{Par double inclusion}
\end{aligned}
$$

On a donc bien $f \in (\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow)(A, B) \iff \forall X \in \mathcal{P}(A),\ f^{\rightarrow}(\,^{c}X) = \,^{c}f^{\rightarrow}(X)$ par transitivité de $\iff$.

[1] Voir mon *paper* sur les FEF à l'adresse `https://github.com/ewen-lbh/theorems/tree/master/function_sets.pdf`

EX$^{\underline{M}}$ORDSUP

$\boxed{5/1}$ $$\mathbb{1}_{X\cap Y} = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_Y$$

$\boxed{5/2}$ $$\sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \#(X\cap Y) =: S_n$$

$\boxed{n=0} \iff S_0 = \#(\varnothing \cap \varnothing) = 0$

$$S_1 = \#(\varnothing\cap\varnothing) + \#(\varnothing \cap \{e_1\}) + \#(\{e_1\}\cap\varnothing)$$
$$+ \#(\{e_1\}\cap\{e_1\})$$
$$= 1$$

$$S_2 = \#(\varnothing\cap\varnothing) + \dots + \#(\varnothing\cap\{e_1,e_2\})$$
$$+ \#(\{e_1\}\cap\varnothing) + \dots + \#(\{e_1\}\cap\{e_1,e_2\})$$
$$+ \#(\{e_2\}\cap\varnothing) + \dots$$
$$+ \#(\{e_1,e_2\}\cap\varnothing) + \dots$$

$$= 0$$
$$+ 2$$
$$+ 2$$
$$+ 4$$

$$= 8$$

$$\sum_{(X,Y)\subset E^2} \#(X\cap Y) = \sum_{(X,Y)\subset E^2}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_{X\cap Y}(x) \quad \text{d'ap } 4/2$$

$$= \sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{X \cap Y}(x)$$

$$= \sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_X(x)\, \mathbb{1}_Y(x)$$

$$= \sum_{x \in E} \Big(\sum_{X \subset E} \mathbb{1}_X(x)\Big)\Big(\sum_{Y \subset E} \mathbb{1}_Y(x)\Big)$$

$$=$$